

DOI: 10.18372/2310-5461.68.20451
УДК 629.7.01

М. М. Комар, канд. техн. наук, старший дослідник
Інститут інформаційних технологій та систем
Національної академії наук України
<https://orcid.org/0000-0001-9194-2850>
E-mail: nickkomar08@gmail.com;

О. Є. Волков, канд. техн. наук, старший дослідник
Інститут інформаційних технологій та систем
Національної академії наук України
<https://orcid.org/0000-0002-5418-6723>
E-mail: alexvolk@ukr.net

О. Г. Махалін
Інститут інформаційних технологій та систем
Національної академії наук України
<https://orcid.org/0009-0004-2512-8104>
E-mail: alexei.makhalin@gmail.com

МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ РУХУ БЕЗПЛОТНОГО ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТА ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАВДАНЬ КЕРУВАННЯ ТА НАВІГАЦІЇ

Вступ

У теперішній час збирання, оброблення, розповсюдження та використання інформації стають основою сталого розвитку сучасного суспільства. Це свідчить про значний потенціал використання прогресивних інформаційних технологій як у цивільній, так і у військовій галузях. Для реалізації цього потенціалу необхідним є удосконалення інформаційних технологій, зокрема, вирішення наукових та прикладних завдань їх інтелектуалізації. Застосування методів штучного інтелекту є потужним засобом побудови комп'ютеризованих систем різного призначення з принципово новими функційними можливостями, зокрема, інтелектуалізованих безпілотних авіаційних систем.

Широке розповсюдження в останні роки безпілотних літальних апаратів (БпЛА), а також їх оснащення різними типами сенсорів та потужними бортовими засобами обробки інформації створили необхідні передумови для використання БпЛА у багатьох сферах. Одна з основних вимог до процесу керування безпілотними авіаційними системами полягає в забезпеченні здатності до автономного виконання поставленого завдання в непередбачуваних середовищах і складних ситуаціях. Це дасть змогу отримати значні переваги в порівнянні з автоматизованими системами, де можливі помилки операторів можуть призвести до значного погіршення ефективності їх функціонування. Інтелектуалізація автономної безпілотної системи надає їй можливість приймати якісні та своєчасні рішення на основі усвідомлення характерних особливостей

навколишнього середовища з врахуванням існуючого набору правил та/або обмежень. Для досягнення потрібного рівня інтелектуалізації необхідне дослідження складної проблеми узгодженої взаємодії між окремими компонентами системи та забезпечення їх функційної сумісності [1].

Виходячи з вищесказаного, можна стверджувати, що створення нових та розвиток методів, технологій та систем для безпіотної авіаційної галузі є актуальними та перспективними науковими та науково-технічними задачами.

Постановка проблеми

Експлуатація БпЛА I-III класу супроводжується поривами, зсувом вітру та турбулентністю приземного шару, що призводить до зміни траєкторії польоту, перевищення обмежень по керуванню, підвищення енерговитрат, а в деяких випадках навіть пошкодження конструкції. Це критично для задач моніторингу, картографування, пошуково-рятувальних робіт і доставки, де вимоги до точності, ефективності та надійності зростають не залежно від умов експлуатації та тривалості місії. У таких умовах стандартні схеми, наприклад PID-регулятори, без урахування впливів оточуючого середовища, зокрема вітрових збурень, забезпечують прийнятну якість керування лише за слабких збурень, тоді як для поривів і зсувів потрібні комплексні інтегровані рішення [2-4].

Для проектування сучасних інформаційних технологій керування польотом безпілотного літального апарата в умовах вітрових збурень необхідною передумовою є розроблення матема-

тичної моделі БпЛА, у якій вітрові збурення враховано в рівняннях руху БпЛА. Така модель робить можливим аналіз динамічних властивостей поздовжнього збуреного руху, а також аналіз параметрів польоту БпЛА, наприклад швидкості, висоти польоту та кута атаки в залежності від керуючих і збурюючих впливів. Це дає змогу досліджувати стійкість та якість перехідних процесів у синтезованих системах автоматичного керування і розробляти нові закони керування [5]. Тому формалізована математична модель із чіткими зв'язками між повітряною/земною швидкостями та вітровими збуреннями стає основою для подальшого синтезу законів керування, що компенсують вплив збурень на динаміку польоту БпЛА [6–7].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У прикладних дослідженнях БпЛА застосовують спектральні моделі Драйдена та Кармана, а також моделі дискретних поривів і градієнтів вітру в межах приземного шару. Модель турбулентності Драйдена зручна для реалізації через фільтри зі скінченновимірними станами; модель Кармана краще узгоджується зі статистикою турбулентності, проте вимагає апроксимацій для цифрової реалізації [2; 8; 9]. Окремі роботи актуалізують дискретні пориви (*gust encounters*) як фізично змістовні сценарії для випробувань сучасних БпЛА [3].

Оцінювання впливу вітру реалізують такими підходами, як розширена фільтрація стану, спостерігачі збурень і розширені спостерігачі стану, а також прогнозне керування. Одним із найбільш поширених та ефективних методів є розширена фільтрація стану (*Extended Kalman Filter*, EKF).

У цьому підході складові вітру безпосередньо інтегруються до вектора стану системи, що дає змогу фільтру одночасно уточнювати як параметри руху (наприклад, висоту, швидкість, орієнтацію), так і невідомі збурення вітру. Така методика забезпечує фізично узгоджені оцінки і демонструє ефективність для БпЛА літакового типу [10–12]. Подальшим розвитком цього напрямку є інваріантні модифікації фільтрів, такі як інваріантний розширений фільтр Калмана (*Invariant Extended Kalman Filter*, IEKF). Використання групових симетрій руху твердого тіла в цих фільтрах дає змогу зменшити систематичні похибки оцінок, підвищуючи точність оцінки вітру і, відповідно, якість керування [13]. Інший клас методів ґрунтується на використанні спостерігачів збурень (*Disturbance Observers*) та розширених спостерігачів стану. Вони розроблені для оцінювання сумарної невідомої зовнішньої дії,

що містить як вітер, так і можливі зміни в аеродинамічних характеристиках БпЛА [14]. Оцінені збурення потім подаються на спеціалізований компенсатор, який вносить корективи в систему керування. Такий підхід часто поєднується з адаптивним керуванням або робастними методиками або прогнозного керування на основі моделі (*Model Predictive Control*, MPC). Така комбінація значно підвищує стійкість БпЛА до швидких змін аеродинаміки, раптових поривів вітру та інших непередбачуваних факторів [8, 14]. Для критично етапів польоту, таких як зліт та посадка застосовують методи, що базуються на прямому вимірюванні вітру. Один із ефективних способів – це використання лазерних далекомірів (*LiDAR*) або інших сенсорів для сканування повітряного потоку безпосередньо перед БпЛА. Отримані дані про профіль вітру у зоні майбутнього руху БпЛА інтегруються у систему прогнозного керування на основі моделі. Це дає змогу контролеру завчасно розрахувати необхідні коригувальні дії, мінімізуючи вплив вітру до того, як він почне безпосередньо діяти на БпЛА [9].

У сучасній літературі досить поширеним є використання спрощених кінематичних моделей для опису польоту безпілотних літальних апаратів. Такі моделі дають змогу розробляти системи для навігації та траєкторного керування в умовах вітрових збурень, але вони не враховують повною мірою динамічні властивості апарата [2]. Існують також динамічні моделі, проте в них часто бракує деталізації у відображенні проекцій аеродинамічних сил і моментів у різних системах координат. Це створює труднощі під час моделювання вітрових збурень і при аналізі обмежень приводів, що значно впливає на коректність досліджень та якість синтезованих алгоритмів керування [10; 15].

Мета статті – розроблення та опис математичної моделі безпілотного літального апарата для її застосування у інформаційній технології зменшення впливу вітрових збурень на траєкторію польоту безпілотного літального апарата.

Виклад основного матеріалу

Вихідні припущення щодо математичної моделі динаміки польоту БпЛА

Основою для дослідження інтегрованих систем керування, а також розробки і моделювання алгоритмів керування є модель руху безпілотного літального апарату літакового типу.

У загальному випадку рух літального апарату відбувається під дією гравітаційних і аеродинамічних сил і моментів, а також сил і моментів від тяги двигунів. При аналізі польоту БпЛА в атмосфері можна знехтувати дією гравітаційних мо-

ментів і враховувати тільки гравітаційну силу, яка прикладена в центрі мас БПЛА і спрямована до центру Землі, незалежно від орієнтації БПЛА [16].

При визначенні руху літального апарату необхідно вирішити такі задачі [17]:

– знайти кутові і лінійні швидкості руху літального апарату, зумовлені дією на нього перерахованих вище сил і моментів;

– визначити кути орієнтації БПЛА відносно Землі і набігаючого на нього потоку; при цьому необхідно мати на увазі, що в загальному випадку при наявності вітру швидкості руху БПЛА відносно Землі і відносно повітряного середовища будуть різні;

– визначити переміщення літального апарату відносно Землі.

Кожній з цих задач відповідає своя група диференціальних рівнянь.

В загальному випадку при синтезі рівнянь руху необхідно враховувати, що Земля є сферичною і обертається відносно інерціального простору. Для врахування обертання Землі при вирішенні задач навігації літальних апаратів, що рухаються в атмосфері, цілком достатньо враховувати лише добове обертання Землі і нехтувати її обертанням при русі навколо Сонця.

При розгляді руху літального апарату зробимо ряд спрощуючих припущень. Будемо вважати, що БПЛА є абсолютно жорстким тілом. Таким чином, збільшення числа ступенів свободи, обумовлене пружністю конструкції, враховуватися не буде. Слід зазначити, що ці припущення виконуються не для всіх типів БПЛА. Зокрема, при аналізі динаміки важких БПЛА вплив пружних коливань в ряді випадків може бути досить значним. Будемо вважати, що маса і моменти інерції літального апарату на розглянутих інтервалах часу незмінні і відповідають вихідному стану рівноважного польоту.

Загальні рівняння руху безпілотного літального апарату

Система нелінійних рівнянь руху безпілотного літального апарату у загальному вигляді

Політ БПЛА розглядається як рух в просторі абсолютно жорсткого тіла, що має шість ступенів свободи. Зазвичай динамічні рівняння руху центру мас БПЛА записують в проекціях на швидкісні або на напівшвидкісні осі координат. Рівняння в проекціях на осі напівшвидкісної системи координат мають вигляд [18]:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha \cos \beta - X - G \sin \theta; \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= (P \sin \alpha + Y) \cos \gamma_c + \\ &+ (P \cos \alpha \sin \beta - Z) \sin \gamma_c - G \cos \theta; \\ -mV \cos \theta \frac{d\psi}{dt} &= (P \sin \alpha + Y) \sin \gamma_c - \\ &-(P \cos \alpha \sin \beta - Z) \cos \gamma_c, \end{aligned} \quad (1)$$

де m – маса БПЛА; V – його швидкість; P – тяга двигуна; G – вага; X, Y, Z – проекції повної аеродинамічної сили на швидкісні осі; θ і ψ – кути нахилу і повороту траєкторії; α і β – кути атаки і ковзання; γ_c – кут крену швидкісної системи координат. Динамічні рівняння обертального руху БПЛА навколо центру мас заведено записувати в проекціях на зв'язані осі. В тому випадку, коли можна не враховувати переміщення центру мас і поворот головних осей інерції апарату через згоряння палива, ці рівняння збігаються за формою з рівняннями тіла постійної маси з тією лише різницею, що моменти інерції залежать від часу. Якщо зв'язані осі при цьому збігаються з головними осями інерції, то динамічні рівняння обертального руху записують в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) &= M_x; \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z \omega_x (I_x - I_z) &= M_y; \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) &= M_z, \end{aligned} \quad (2)$$

де I_x, I_y, I_z – моменти інерції БПЛА відносно зв'язаних осей; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекції вектора кутової швидкості БПЛА на зв'язані осі; M_x, M_y, M_z – проекції моментів всіх зовнішніх сил.

Сила тяги, аеродинамічні сили та їх моменти є складними нелінійними функціями кінематичних параметрів руху і кутів відхилення органів керування, в тому числі керма висоти δ_v , і напрямку δ_n , елеронів δ_e , і дросельної заслінки $\delta_{др}$, що слугує для регулювання тяги двигуна. Кінематичні рівняння, що описують обертання БПЛА щодо земних осей мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi}{dt} &= \frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma); \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_y \sin\gamma + \omega_z \cos\gamma; \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - tg\vartheta(\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma),\end{aligned}\quad (3)$$

де Ψ , ϑ , γ – кути ристання, тантажа і крену БпЛА.

Так як динамічні рівняння руху центру мас БпЛА (1) були записані в напівшвидкісних осях, рівняння обертального руху навколо центру мас (2) і (3) – в зв'язаних осях, а аеродинамічні сили і моменти в правих частинах рівнянь (1) і (2) залежать, зокрема, від кутів α і β між швидкісними і зв'язаними осями, то виникає необхідність в додаванні до записаних рівнянням геометричних співвідношень між кутами Ψ , ϑ , γ , γ_c , β , α , ψ :

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \cos\alpha \cos\beta \sin\vartheta - \\ &-(\sin\alpha \cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma) \cos\vartheta; \\ \sin\Psi \cos\theta &= \cos\alpha \cos\beta \sin\psi \cos\vartheta + \\ &+ \sin\alpha \cos\beta(\cos\psi \sin\gamma + \sin\psi \sin\vartheta \cos\gamma) - \\ &- \sin\beta(\cos\psi \cos\gamma - \sin\psi \sin\vartheta \sin\gamma); \\ \sin\gamma_c \cos\theta &= \cos\alpha \sin\beta \sin\vartheta - \\ &-(\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma - \cos\beta \sin\gamma) \cos\vartheta.\end{aligned}\quad (4)$$

Кінематичні рівняння руху центру мас БпЛА в проєкціях на земні декартові осі мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= V \cos\theta \cos\Psi; \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin\theta; \\ \frac{dz}{dt} &= V \cos\theta \sin\Psi,\end{aligned}\quad (5)$$

де x , y , z – координати центру мас БпЛА в земних декартових осях.

Беручи до уваги, що аеродинамічні сили залежать від висоти, слід ввести геометричне співвідношення, що зв'яже висоту польоту H з координатами x , y , z і враховуючи таким чином сферичну форму Землі. Якщо сферичністю Землі знехтувати і поєднати координатну площину з горизонтальною, то будемо мати:

$$H = y. \quad (6)$$

При наведенні БпЛА з нерухомого командного пункту по променю або за допомогою команд, які формуються в координатах командного пункту, для опису руху центру мас БпЛА використовують сферичні координати. Тоді рівняння (5) доповнюються співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= V \cos\theta \cos(\Psi - \chi) \cos\phi + V \sin\theta \sin\phi; \\ r \frac{d\phi}{dt} &= -V \cos\theta \cos(\Psi - \chi) \sin\phi + V \sin\theta \cos\phi; \\ r \cos\phi \frac{d\chi}{dt} &= V \cos\theta \sin(\Psi - \chi),\end{aligned}\quad (7)$$

де r , ϕ , χ – координати центра мас БпЛА в земних сферичних осях (похила дальність, кут місця і азимут відповідно). Якщо командний пункт розташований на рухомому носії, то, розглядаючи рух БпЛА щодо носія, замість (7) використовують такі кінематичні рівняння:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= V \cos\theta \cos(\Psi - \chi) \cos\phi + V \sin\theta \sin\phi - \\ &- V_c \cos\theta_c \cos(\Psi_c - \chi) \cos\phi - V_c \sin\theta_c \sin\phi; \\ r \frac{d\phi}{dt} &= -V \cos\theta \cos(\Psi - \chi) \sin\phi + V \sin\theta \cos\phi + \\ &+ V_c \cos\theta_c \cos(\Psi_c - \chi) \sin\phi - V_c \sin\theta_c \cos\phi; \\ r \cos\phi \frac{d\chi}{dt} &= V \cos\theta \sin(\Psi - \chi) - \\ &- V_c \cos\theta_c \sin(\Psi_c - \chi).\end{aligned}\quad (8)$$

Тут r , ϕ , χ – координати центру мас БпЛА в сферичних осях, що переміщуються поступально разом з центром мас носія; V_c – швидкість носія; θ_c , Ψ_c – кути нахилу і повороту траєкторії носія.

При самонаведенні або наведенні за допомогою команд, які формуються в координатах БпЛА, розглядають рух цілі відносно БпЛА. Тоді використовують кінематичні рівняння, аналогічні рівнянням (8):

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= V_t \cos\theta_t \cos(\Psi_t - \chi) \cos\phi + V_t \sin\theta_t \sin\phi - \\ &- V \cos\theta \cos(\Psi - \chi) \cos\phi - V \sin\theta \sin\phi; \\ r \frac{d\phi}{dt} &= -V_t \cos\theta_t \cos(\Psi_t - \chi) \sin\phi + \\ &+ V_t \sin\theta_t \cos\phi + V \cos\theta \cos(\Psi - \chi) \sin\phi - \\ &- V \sin\theta \cos\phi; \\ r \cos\phi \frac{d\chi}{dt} &= V_t \cos\theta_t \sin(\Psi_t - \chi) - \\ &- V \cos\theta \sin(\Psi - \chi),\end{aligned}\quad (9)$$

де r , ϕ , χ – координати центру мас цілі в сферичних осях, які переміщуються поступально разом з центром мас БпЛА; V_t – швидкість цілі; θ_t , Ψ_t – кути нахилу і повороту траєкторії цілі. Крім записаних рівнянь руху БпЛА необхідно використовувати диференціальне рівняння, що описує зміну маси:

$$\frac{dm}{dt} = -m_c, \quad (10)$$

де $m_c(V, H, \delta_{op})$ – секундна витрата палива, що залежить від типу двигуна, режиму його роботи, швидкості і висоти польоту. Рівняння (1)–(10) складають систему рівнянь руху БПЛА, що розглядається як абсолютно тверде тіло, відносно плоскої Землі, яка не обертається. Вона містить чотири невідомих $\delta_v, \delta_h, \delta_\alpha, \delta_{dr}$. Щоб ця система рівнянь стала замкнутою, необхідно або задати відхилення перерахованих органів керування в функції часу, або додати рівняння, що описують процеси керування відхиленнями цих органів.

Лінеаризація рівнянь руху безпілотного літального апарату

Основні методи дослідження нелінійних рівнянь (1)–(10) пов’язані з попереднім їх спрощенням. Одним з таких спрощень є лінеаризація цих рівнянь відносно малих відхилень параметрів руху від їх значень для деякого теоретичного руху. При цьому параметри такого руху зазвичай визначають приблизно за допомогою чисельного інтегрування рівнянь руху центру мас БПЛА. Крім того, лінеаризовані рівняння можна значно спростити, якщо припустити, що в незбуреному русі бічні кінематичні параметри і кути відхилення органів керування бічними рухами є досить малими величинами [16]. Це припущення в більшості випадків не є грубим, особливо для БПЛА, траєкторія яких лежить в межах порівняно невеликого просторового кута.

Часто при лінеаризації рівнянь нехтують варіаціями висоти ΔH , так як її вплив на інші варіації параметрів руху малий. Тому враховувати варіації висоти має сенс тільки в тому випадку, якщо висота є однією з координат, які підлягають регулюванню, і система керування для здійснення такого регулювання має відповідний вимірювальний елемент. Виконавши лінеаризацію всіх рівнянь системи (1)–(10), маємо систему лінійних диференціальних рівнянь відносно їх незбурених значень зі змінними коефіцієнтами. Так як БПЛА мають зазвичай площину симетрії Ox_1y_1 , то при зазначених вище спрощеннях лінійна система рівнянь руху БПЛА розпадається на дві незалежні підсистеми. Перша підсистема рівнянь визначає подовжній збурений рух БПЛА, а друга – бічний збурений рух. За умов, використаних при лінеаризації рівнянь, ці два рухи можна вважати незалежними. Таким чином, замість того, щоб досліджувати систему рівнянь високого порядку, досліджують дві незалежні системи рівнянь нижчого порядку. Лінійні рівняння подовжнього руху БПЛА, отримані шляхом лінеаризації рівнянь (1)–(10) при зазначених вище припущеннях, з урахуванням збурюючих сил і моментів $X_\delta, Y_\delta, M_{z\delta}$ запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta V}{dt} &= \frac{P^V - X^V}{m} \Delta V - \frac{P\alpha + X^\alpha}{m} \Delta\alpha - \\ &- g \cos \theta \Delta\theta - \frac{X^{\delta_\alpha}}{m} \Delta\delta_\alpha + \frac{X_\delta}{m}; \\ \frac{d\Delta\theta}{dt} &= \frac{P^V \alpha + Y^V}{mV} \Delta V + \frac{P + Y^\alpha}{mV} \Delta\alpha + \\ &+ \frac{g \sin \theta}{V} \Delta\theta + \frac{Y^{\delta_\alpha}}{mV} \Delta\delta_\alpha + \frac{Y_\delta}{mV}; \\ \frac{d\Delta\omega_z}{dt} &= \frac{M_z^V}{I_z} \Delta V + \frac{M_z^\alpha}{I_z} \Delta\alpha + \frac{M_z^{\omega_z}}{I_z} \Delta\omega_z + \\ &+ \frac{M_z^\alpha}{I_z} \Delta\dot{\alpha} + \frac{M_z^{\delta_\alpha}}{I_z} \Delta\dot{\delta}_\alpha + \frac{M_z^{\dot{\delta}_\alpha}}{I_z} \Delta\dot{\delta}_\alpha + \frac{M_{z\delta}}{I_z}; \\ \frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= \Delta\omega_z; \\ \frac{d\Delta x}{dt} &= \cos \theta \Delta V - V \sin \theta \Delta\theta; \\ \frac{d\Delta H}{dt} &= \sin \theta \Delta V + V \cos \theta \Delta\theta. \end{aligned} \tag{11}$$

Надалі на підставі системи рівнянь (11) можливий аналіз динамічних властивостей подовжнього збуреного руху, також можна визначити різні передавальні функції БПЛА, що описують взаємний зв’язок вихідних величин $\Delta V, \Delta H, \Delta\alpha$ з вхідними керуючими і збурюючими впливами, що дає можливість досліджувати стійкість і якість перехідних процесів в синтезованих систем автоматичного керування.

Динаміка та кінематика руху безпілотного літального апарату

Якщо при вирішенні задач аналізу динаміки літака знехтувати впливом зміни орієнтації місцевої вертикалі і горизонтальної площини під час переміщення БПЛА відносно сферичної Землі, то кінематичні співвідношення, що зв’язують похідні кутів $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\gamma}$ з кутовими швидкостями обертання зв’язаних осей $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ відносно нормальної системи координат мають вигляд [19]:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) / \cos \vartheta; \\ \dot{\vartheta} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma; \\ \dot{\gamma} &= \omega_x - (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \sin \vartheta / \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Рівняння руху центру мас БПЛА в проекціях на осі траєкторної системи координат, не враховуючи вплив сферичності і обертання Землі, мають вигляд:

$$\begin{aligned} m\dot{V}_k &= R_{kx} + P_{kx} + G_{kx}; \\ m\dot{V}_k &= R_{ky} + P_{ky} + G_{ky}; \\ mV_k \dot{\psi} \cos \theta &= R_{kz} + P_{kz} + G_{kz}, \end{aligned}$$

де V_k – земна швидкість БПЛА; m – маса літального апарату; R_{kx} , R_{ky} , R_{kz} – проекції вектору аеродинамічних сил \bar{R} на осі траєкторної системи координат; P_{kx} , P_{ky} , P_{kz} – проекції вектору тяги \bar{P} на осі траєкторної системи координат; G_{kx} , G_{ky} , G_{kz} – проекції вектору сили тяжіння \bar{G} на осі траєкторної системи координат.

Проекції вектору сили тяжіння на осі нормальної системи координат мають вигляд:

$$\begin{vmatrix} G_{gx} \\ G_{gy} \\ G_{gz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{vmatrix},$$

де $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення сили тяжіння.

Проекції вектору сили тяжіння на осі траєкторної системи координат визначаються співвідношенням:

$$\begin{vmatrix} G_{kx} \\ G_{ky} \\ G_{kz} \end{vmatrix} = akg \begin{vmatrix} G_{gx} \\ G_{gy} \\ G_{gz} \end{vmatrix};$$

Проекції вектору тяги на осі зв'язаної системи координат виглядають наступним чином:

$$\begin{vmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P \cos \varphi_p \\ P \sin \varphi_p \\ 0 \end{vmatrix},$$

де φ_p – кут установки двигуна відносно зв'язаної системи координат ($\varphi_p > 0$, коли вектор тяги має додатну проекцію на зв'язану вісь ОУ).

Проекції вектору тяги на осі нормальної системи координат визначаються співвідношенням:

$$\begin{vmatrix} P_{gx} \\ P_{gy} \\ P_{gz} \end{vmatrix} = asg' \begin{vmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{vmatrix};$$

Проекції вектору тяги на осі траєкторної системи координат визначаються співвідношенням:

$$\begin{vmatrix} P_{kx} \\ P_{ky} \\ P_{kz} \end{vmatrix} = akg \begin{vmatrix} P_{gx} \\ P_{gy} \\ P_{gz} \end{vmatrix};$$

Проекції вектору аеродинамічних сил на осі швидкісної системи координат мають вигляд:

$$\begin{aligned} R_{ax} &= -C_{xa}Sq; \\ R_{ay} &= C_{ya}Sq; \\ R_{az} &= C_{za}Sq; \\ q &= \frac{\rho V^2}{2}, \end{aligned} \quad (12)$$

де C_{xa} , C_{ya} , C_{za} – коефіцієнти проекцій аеродинамічної сили на осі швидкісної системи координат; V – повітряна швидкість БПЛА; S – площа крила;

q – швидкісний напір; ρ – щільність повітря на висоті H .

Коефіцієнти аеродинамічних сил C_{xa} , C_{ya} , C_{za} , які входять в рівняння (12), залежать від орієнтації літака відносно набігаючого повітряного потоку, яка визначається кутами атаки α і ковзання β .

Проекції вектору аеродинамічних сил на осі нормальної системи координат мають вигляд:

$$\begin{vmatrix} R_{gx} \\ R_{gy} \\ R_{gz} \end{vmatrix} = aag' \begin{vmatrix} R_{ax} \\ R_{ay} \\ R_{az} \end{vmatrix}.$$

Проекції вектору аеродинамічних сил на осі траєкторної системи координат мають вигляд:

$$\begin{vmatrix} R_{kx} \\ R_{ky} \\ R_{kz} \end{vmatrix} = akg \begin{vmatrix} R_{gx} \\ R_{gy} \\ R_{gz} \end{vmatrix}.$$

Кінематичні рівняння, які визначають положення літака відносно земної поверхні, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= V_k \cos \theta \cos \Psi; \\ \dot{H} &= V_k \sin \theta; \\ \dot{Z} &= -V_k \cos \theta \sin \Psi; \end{aligned}$$

де X , H , Z – дальність, висота і бічний зсув.

У випадку, коли повітряне середовище переміщується зі швидкістю відносно земної поверхні, повітряна швидкість БПЛА відносно повітря може бути визначена як:

$$\bar{V} = \bar{V}_k - W. \quad (13)$$

Проекції співвідношення (13) на осі нормальної системи координат мають вигляд:

$$V_{gx} = V_k \cos \theta \sin \Psi - W_{gx};$$

$$V_{gy} = V_k \sin \theta - W_{gy};$$

$$V_{gz} = -V_k \cos \theta \sin \Psi - W_{gz},$$

де W_{gx} , W_{gy} , W_{gz} – проекції швидкості вітру на осі нормальної системи координат.

Повітряна швидкість БПЛА записується у вигляді:

$$V = \sqrt{V_{gx}^2 + V_{gy}^2 + V_{gz}^2}.$$

Кути атаки і ковзання знаходяться через проекції вектору \bar{V} на осі нормальної системи координат. Ґрунтуючись на визначенні кутів атаки α і ковзання β , отримаємо:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta_a &= \frac{V_{gy}}{V}; \quad \cos \vartheta_a = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta_a}; \\ \sin \psi_a &= \frac{-V_{gz}}{V \cos \vartheta_a}; \quad \sin \psi_a = \frac{-V_{gz}}{V \cos \vartheta_a}; \\ \sin(\psi - \psi_a) &= \sin \psi \cos \psi_a - \cos \psi \sin \psi_a; \\ \cos(\psi - \psi_a) &= \cos \psi \cos \psi_a + \sin \psi \sin \psi_a; \\ \sin \beta &= [\cos \gamma \sin(\psi - \psi_a) + \\ &+ \sin \vartheta \sin \gamma \cos(\psi - \psi_a)] \cos \vartheta_a - \\ &- \sin \vartheta_a \cos \vartheta \cos \gamma \\ \cos \beta &= \sqrt{1 - \sin^2 \beta}; \\ \beta &= \arctg\left(\frac{\sin \beta}{\cos \beta}\right); \\ \sin \alpha &= [\sin \vartheta \cos \gamma \cos(\psi - \psi_a) - \\ &- \sin \gamma \sin(\psi - \psi_a)] \frac{\cos \vartheta_a}{\cos \beta} - \\ &- \sin \vartheta_a \cos \vartheta \cos \gamma \frac{1}{\cos \beta}; \\ \cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}; \\ \alpha &= \arctg\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right); \\ \sin \gamma_a &= [\cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta - \\ &- \cos \vartheta (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma)] \frac{1}{\cos \vartheta_a}; \\ \cos \gamma_a &= \sqrt{1 - \sin^2 \gamma_a}; \\ \gamma_a &= \arctg\left(\frac{\sin \gamma_a}{\cos \gamma_a}\right). \end{aligned}$$

Рівняння руху БПЛА відносно центру мас в системі координат з урахуванням наявності у БПЛА площині симетрії (тобто $I_{xz} = I_{yz} = 0$) записуються в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x I_x &= m_x q S l + I_{xy} (\dot{\omega}_y - \omega_x \omega_z) - (I_z - I_y) \omega_y \omega_z; \\ \dot{\omega}_y I_y &= m_y q S l + I_{xy} (\dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z) - (I_x - I_z) \omega_x \omega_z; \\ \dot{\omega}_z I_z &= m_z q S l + I_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2) - (I_y - I_x) \omega_x \omega_y, \end{aligned}$$

де I_x, I_y, I_z – моменти інерції тіла відносно осей OX, OY, OZ ; I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} – центробіжні моменти інерції тіла відносно відповідних пар осей; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекції вектору кутової швидкості повороту зв'язаної системи координат; m_x, m_y, m_z – безрозмірні коефіцієнти аеродинамічних моментів; b_A – довжина середньої аеродинаміч-

ної хорди;
 l – розмах крила.

Складові коефіцієнтів аеродинамічних сил і моментів, які використовуються в розрахунках, визначаються шляхом інтерполяції таблиць даних, побудованих за експериментальними графіками відповідних залежностей, отриманих при аеродинамічних дослідженнях обраних моделей прототипів БПЛА.

Модель ґрунтується на відображенні руху БПЛА у шести ступенях свободи, що відповідає загальним рівнянням руху абсолютно жорсткого тіла. Особливість полягає у врахуванні проекцій сил ваги, тяги, та аеродинамічних сил на швидкісні, нормальні та траєкторні осі.

Особлива увага приділяється кінематичним співвідношенням, які чітко вплив вітру. Земна швидкість БПЛА та його повітряна швидкість пов'язані вектором швидкості вітру. Проекції цього співвідношення на осі нормальної системи координат дають змогу враховувати збурення вітру у всіх рівняннях руху. Кути атаки і ковзання, від яких залежать аеродинамічні сили, також знаходяться через проекції повітряної швидкості.

Така формалізована математична модель є не лише базою для побудови алгоритмів оцінювання та компенсації вітрових збурень, але й забезпечує можливість подальшої лінеаризації. Завдяки симетрії БПЛА, лінійна система рівнянь може бути декомпозована на дві незалежні підсистеми – поздовжнього та бічного руху. Це дає змогу на основі лінеаризованих рівнянь визначати передавальні функції, що описують взаємозв'язок між вихідними параметрами польоту та керуючими і збурюючими впливами. Це дає змогу досліджувати стійкість і якість перехідних процесів у синтезованих системах автоматичного керування. Таким чином, розроблена модель є необхідною основою для проектування сучасних інформаційних технологій керування польотом БПЛА у умовах вітрових збурень тощо.

Висновки

У статті було представлено формалізовану математичну модель безпілотного літального апарата, яка описує його рух у шести ступенях свободи з урахуванням проекцій сил у різних системах координат. Особливістю моделі є врахування впливу вітрових збурень через зв'язок між повітряною та земною швидкістю, що забезпечує фізично обґрунтоване відображення збурень у рівняннях поступального та обертового руху. Це дає змогу не лише аналізувати динамічні властивості поздовжнього і бічного руху, але й будувати передавальні функції для дослідження взаємозв'язку між вихідними параметрами польоту та керуючими впливами.

Лінеаризація та декомпозиція нелінійної системи на підсистеми дає змогу значно спростити аналіз і створює умови для дослідження стійкості й якості перехідних процесів у системах автоматичного керування. Запропонована модель є базовим інструментом для подальшого синтезу робастних та адаптивних регуляторів, а також для розроблення інформаційних технологій компенсації впливу вітрових збурень на траєкторію БПЛА.

Таким чином, розроблена модель є необхідною науковою та практичною основою для створення інтегрованих технологій керування польотом безпілотних літальних апаратів у реальних атмосферних умовах, що дасть змогу підвищити точність, надійність та ефективність їх застосування.

Фінансова підтримка

Дослідження підготовлено за грантової підтримки Національного фонду досліджень України в рамках реалізації проєкту реєстраційний номер 2025.06/0066. в рамках конкурсу «Наука для зміцнення обороноздатності і національної безпеки України».

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Волков О. Є., Комар М. М. Інтелектуалізація процесів прийняття рішень в автономних системах керування. *Cyb. and Comp. Eng.* 2021. № 2 (204). С. 49–63. DOI: <https://doi.org/10.15407/kvt204.02.049>
- [2] Kistner J., Neuhaus L., Wildmann N. High-resolution wind speed measurements with quadcopter uncrewed aerial systems: calibration and verification in a wind tunnel with an active grid. *Atmospheric Measurement Techniques*. 2024. Vol. 17, No. 16. P. 4941–4955. DOI: <https://doi.org/10.5194/amt-17-4941-2024> (eng).
- [3] Jones A. R., Cetiner O., Smith M. J. Physics and modeling of large flow disturbances: Discrete Gust Encounters for Modern Air Vehicles. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2022. Vol. 54, No. 1. P. 469–493. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-031621-085520> (eng).
- [4] Hui N., Guo Y., Han X., Wu B. Robust H-Infinity Dual Cascade MPC-Based Attitude Control Study of a Quadcopter UAV. *Actuators*. 2024. Vol. 13, No. 10. P. 392. DOI: <https://doi.org/10.3390/act13100392> (eng).
- [5] Chen P., Zhang G., Li J., Chang Z., Yan Q. Path-Following Control of Small Fixed-Wing UAVs under Wind Disturbance. *Drones*. 2023. Vol. 7, No. 4. P. 253. DOI: [10.3390/drones7040253](https://doi.org/10.3390/drones7040253) (eng).
- [6] Sadi M. A., Jamali A., bin Abang Kamaruddin A.M.N., Jun V.Y.S. Cascade model predictive control for enhancing UAV quadcopter stability and energy efficiency in wind turbulent mangrove forest environment. *e-Prime – Advances in Electrical Engineering, Electronics and Energy*. 2024. Vol. 10. P. 100836. DOI: [10.1016/j.prime.2024.100836](https://doi.org/10.1016/j.prime.2024.100836) (eng).
- [7] Wang R., Shen J. Disturbance observer and adaptive control for disturbance rejection of quadrotor: A survey. *Actuators*. 2024. Vol. 13, No. 6. P. 217. DOI: [10.3390/act13060217](https://doi.org/10.3390/act13060217) (eng).
- [8] Nithya D. S., Quaranta G., Muscarello V., Liang M. Review of wind flow modelling in urban environments to support the development of urban air mobility. *Drones*. 2024. Vol. 8, No. 4. P. 147. DOI: [10.3390/drones8040147](https://doi.org/10.3390/drones8040147) (eng).
- [9] Mendez A. P., Whidborne J. F., Chen L. Wind Preview-Based Model Predictive Control of Multi-Rotor UAVs Using LiDAR. *Sensors*. 2023. Vol. 23, No. 7. P. 3711. DOI: [10.3390/s23073711](https://doi.org/10.3390/s23073711) (eng).
- [10] Wang Q., Wang W., Suzuki S. UAV trajectory tracking under wind disturbance based on novel antidisturbance sliding mode control. *Aerospace Science and Technology*. 2024. Vol. 149. P. 109138. DOI: [10.1016/j.ast.2024.109138](https://doi.org/10.1016/j.ast.2024.109138) (eng).
- [11] Grillo C., Montano F. Wind component estimation for UAS flying in turbulent air. *Aerospace Science and Technology*. 2019. Vol. 93. P. 105317. DOI: [10.1016/j.ast.2019.105317](https://doi.org/10.1016/j.ast.2019.105317) (eng).
- [12] Sharma A., Laupre G.F., Longobardi P., Skaloud J. Synthetic Wind Estimation for Small Fixed-Wing Drones. *Atmosphere*. 2024. Vol. 15, No. 11. P. 1339. DOI: [10.3390/atmos15111339](https://doi.org/10.3390/atmos15111339) (eng).
- [13] Ahmed Z., Woolsey C.A. The Invariant Extended Kalman Filter for Wind Estimation Using a Small Fixed-Wing UAV in Horizontal-Plane Flight. In: *AIAA Scitech 2024 Forum*. P. 2656. DOI: [10.2514/6.2024-2656](https://doi.org/10.2514/6.2024-2656) (eng).
- [14] Jeong H., Suk J., Kim S. Control of quadrotor UAV using variable disturbance observer-based strategy. *Control Engineering Practice*. 2024. Vol. 150. P. 105990. DOI: [10.1016/j.conengprac.2024.105990](https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2024.105990) (eng).
- [15] Song Y., Yong K., Wang X. Disturbance interval observer-based robust constrained control for unmanned aerial vehicle path following. *Drones*. 2023. Vol. 7, No. 2. P. 90. DOI: [10.3390/drones7020090](https://doi.org/10.3390/drones7020090) (eng).
- [16] Stengel R. F. *Flight Dynamics*. 2nd ed. Princeton University Press, 2022. DOI: [10.1515/9781400866816](https://doi.org/10.1515/9781400866816) (eng).
- [17] Beard R.W., McLain T.W. *Small unmanned aircraft: Theory and practice*. Princeton University Press, 2012. 312 p. (eng).
- [18] Vepa R. *Flight Dynamics, Simulation, and Control: For Rigid and Flexible Aircraft*. 2nd ed. CRC Press, 2023. DOI: [10.1201/9781003266310](https://doi.org/10.1201/9781003266310) (eng).
- [19] Stevens B. L., Lewis F. L., Johnson E. N. *Aircraft control and simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems*. 3rd ed. Wiley, 2015. DOI: [10.1002/9781119174882](https://doi.org/10.1002/9781119174882) (eng).

Комар М. М., Волков О. Є., Махалін О. Г.

МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ РУХУ БЕЗПІЛОТНОГО ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТА ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАВДАНЬ КЕРУВАННЯ ТА НАВІГАЦІЇ

Актуальність. Використання безпілотних літальних апаратів (БпЛА) у цивільних і військових завданнях стрімко зростає, проте їхня ефективність значно знижується під дією поривів, зсувів і турбулентності вітру. Це особливо критично для моніторингу, картографування, пошуково-рятувальних операцій чи доставки, де важливими є точність, надійність і ефективність. В таких умовах стандартні схеми керування працюють лише за слабких впливів, що обмежує функціональність і знижує безпеку застосування БпЛА. Таким чином, постає потреба у створенні адекватних математичних моделей і сучасних інформаційних технологій, здатних компенсувати негативний вплив вітру.

Постановка проблеми. Традиційні спрощені моделі польоту та стандартні регулятори забезпечують стійкість лише в умовах слабких впливів, що не задовольняє вимоги до точності й надійності. Однією з ключових передумов створення сучасних інформаційних технологій керування є побудова математичної моделі БпЛА, яка коректно враховує вплив вітру на рух апарата.

Шляхи вирішення. У статті запропоновано модель динаміки руху безпілотного літального апарата, що описує його рух у шести ступенях свободи. У ній враховано проєкції сил тяжіння, тяги та аеродинамічних сил на швидкісні, нормальні та траєкторні системи координат, а також включено вплив вітру через зв'язок між повітряною та земною швидкістю. Це створює умови для подальшої лінеаризації рівнянь, декомпозиції системи на поздовжній і бічний рух та визначення передавальних функцій, необхідних для аналізу та синтезу систем автоматичного керування.

Результати. Розроблена модель дає змогу досліджувати поздовжній і бічний збуджений рух, оцінювати стійкість та якість перехідних процесів у системах керування. Вона забезпечує формалізовану основу для підключення моделей вітру, проведення випробувань різних сценаріїв та порівняння методів компенсації збуджень.

Висновки. Запропонована модель є основою для розроблення інформаційних технологій керування польотом БпЛА в умовах вітрових збуджень. Вона дає змогу створювати робастні та прогнозні алгоритми керування, що підвищують точність, ефективність і надійність виконання польотних завдань у складних атмосферних умовах.

Ключові слова: безпілотний літальний апарат; вітрові збудження; математична модель; стійкість; автоматичне керування.

Komar M., Volkov O., Makhalin O.

DYNAMIC MOTION MODEL OF AN UNMANNED AERIAL VEHICLE FOR CONTROL AND NAVIGATION TASKS

Relevance. The use of unmanned aerial vehicles (UAVs) in civil and military applications is rapidly increasing, but their effectiveness significantly decreases under the influence of gusts, wind shear, and turbulence. This problem is especially critical for monitoring, mapping, search and rescue operations, and delivery tasks, where accuracy, reliability, and energy efficiency are crucial. In such conditions, standard control schemes that do not account for atmospheric disturbances are effective only under weak influences, limiting functionality and reducing operational safety. Thus, there is a growing need for adequate mathematical models and modern information technologies capable of compensating the negative effects of wind.

Problem statement. Traditional simplified flight models and standard controllers ensure stability only under weak disturbances, which does not meet the requirements for accuracy and reliability. One of the key prerequisites for developing advanced information technologies for flight control is the construction of a mathematical model of a UAV that correctly accounts for wind effects in its motion equations.

Solution approach. The paper proposes a dynamic model of UAV motion that describes its behavior in six degrees of freedom. The model includes projections of gravity, thrust, and aerodynamic forces onto velocity, normal, and trajectory axes, and incorporates wind disturbances through the relationship between airspeed and ground speed. This approach enables the linearization of equations, decomposition into longitudinal and lateral motion subsystems, and derivation of transfer functions necessary for the analysis and synthesis of automatic control systems.

Results. The developed model makes it possible to study longitudinal and lateral disturbed motion, evaluate stability, and assess the quality of transient processes in control systems. It provides a formalized basis for integrating wind models, testing different flight scenarios, and comparing methods of disturbance compensation.

Conclusions. The proposed model is a scientific and practical foundation for designing information technologies for UAV flight control under wind disturbances. It enables the development of robust and predictive control algorithms that improve accuracy, energy efficiency, and reliability of UAV missions under challenging atmospheric conditions.

Keywords: unmanned aerial vehicle; wind disturbances; mathematical model; stability; automatic control.

Стаття надійшла до редакції 06.10.2025 р.
Прийнято до друку 10.12.2025 р.