

DOI: 10.18372/2310-5461.71.21424
УДК 519.816(045)

Р.В. Литвиненко, аспірант

Національний університет «Київський авіаційний інститут»

<https://orcid.org/0009-0000-8763-9111>

e-mail: litvineenko.rodion@gmail.com

МЕТОД ПЕРЕРОЗПОДІЛУ ФУНКЦІЙ МІЖ ВУЗЛАМИ РОЗПОДІЛЕНОЇ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ, ЩО ЗАЗНАЛА ЧАСТКОВОГО ФІЗИЧНОГО РУЙНУВАННЯ

Вступ

Розподілена інформаційна система (PIC) є апаратно-програмним комплексом, який може бути представлений у вигляді неорієнтованого графа та включає в себе центри обробки даних та канали їх передачі. PIC широко використовуються в сучасних телекомунікаційних технологіях, зокрема в мобільних мережах (4G, 5G), системах комутації та маршрутизації, хмарних платформах (*SaaS*, *PaaS*, *IaaS*), засобах контейнеризації та віртуалізації тощо.

Напрямами, які набирають обертів в контексті використання розподілених інформаційних систем, є оборонна та енергетична галузі. Так, швидко розвивається розробка автономних бойових та інформаційних платформ, систем управління та зв'язку тощо. Навіть засоби керування водо- та теплопостачанням і *smart home* засновані на принципах функціонування розподілених інформаційних систем.

Як і будь-які інші системи, PIC може бути пошкоджена внаслідок аварій, природних катаклізмів, цілеспрямованих фізичних атак військового характеру тощо. Окрім фізичного знищення або пошкодження, є можливим і сценарій «подавлення» системи засобами радіоелектронної боротьби (РЕБ), тож під атакою можуть опинитися і бездротові мережі чи системи.

Оскільки розподілені інформаційні системи відіграють ключову роль у функціонуванні багатьох галузей, вкрай важливо у випадку виходу такої системи з ладу відновити її роботу в найкоротші терміни. До того ж, у разі знищення одного чи декількох центрів обробки даних (ЦОД) необхідно перерозподілити функції зазначених вузлів між вцілілими вузлами системи.

В загальному випадку такий перерозподіл вимагає врахування множини факторів, зокрема продуктивності центрів обробки даних, пропускної здатності каналів передачі даних, інтенсивності інформаційних потоків тощо. В простішому варіанті перерозподілу потрібно насамперед зв'язати на пам'ять ЦОД як його ключовий ресурс.

Оскільки ворог дедалі частіше вдається до масованих ракетних обстрілів критичної та військової інфраструктури на території України, ефективне реагування та відновлення пошкоджених об'єктів стало першочерговим пріоритетом. Тож задача розробки методу для перерозподілу ресурсів частково зруйнованих розподілених інформаційних систем є вкрай актуальною, а її реалізація дозволить ефективно та в максимальному обсязі зберегти працездатність пошкоджених систем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Задача перерозподілу функцій між вузлами розподіленої інформаційної системи після її часткового фізичного руйнування пов'язана з трьома основними напрямками досліджень: балансування навантаження у присутності відмов вузлів, задачею узагальненого призначення (*GAP*), а також мінімізації сукупних витрат на встановлення або відновлення пошкодженої мережевої інфраструктури.

Існуючі підходи до балансування мають суттєві обмеження щодо завдань, які розглядаються у даній статті [1].

Більшість алгоритмів базується на припущенні про подільність навантаження. Зокрема, у роботі [2] досліджується розподіл неподільного навантаження між географічно розподіленими центрами обробки даних, де неподільне навантаження визначається як послідовна задача, яка не може бути додатково розбита та має бути призначена єдиному центру обробки даних. Натомість у досліджуваній задачі функціональний комплекс знищеного вузла є неподільним і має бути переданий одному вцілілому вузлу в повному обсязі, однак контекст фізичного руйнування вузлів PIC у згаданій роботі не розглядається. Аналогічною є проблема з вирішенням задачі узагальненого призначення (*Generalized Assignment Problem, GAP*), варіацією якої є задача перерозподілу функцій. *GAP* полягає у розподілі задач агентам таким чином, щоб кожна задача була призначена рівно одному агенту та

щоб ресурсні обмеження кожного агента не порушувались [3]. Широкий огляд застосувань *GAP* у плануванні, телекомунікаціях і розміщенні об'єктів представлено у роботах [4]–[5]. Однак у стандартній постановці *GAP* допускається будь-який розподіл об'єктів між агентами, тоді як у запропонованій моделі до задачі вводиться специфічна семантична вимога: функції кожного знищеного вузла є неподільним комплексом, і жоден з таких комплексів не може бути розділений між декількома вціленими вузлами. Ця вимога звужує простір допустимих розв'язків і робить задачу структурно відмінною від загального *GAP*.

Застосування цілочисельного та бінарного програмування для розподілу ресурсів у мережесистемах є добре дослідженою темою. Цілочисельне програмування широко використовується в комунікаційних мережах для задач синтезу, призначення та планування, а також для оптимального розміщення ресурсів у графі задля задоволення вимог щодо передачі даних навіть у разі відмови вузла чи каналу [6]. Проте наявні роботи орієнтуються насамперед на мінімізацію вартості призначення або максимізацію пропускнуої здатності, а не на максимізацію кількості вцілених вузлів із залишковим ресурсом, що є оригінальним критерієм оптимальності у запропонованій статті.

Подібною до розглянутої в даній статті є задача відновлення сервісів у пошкодженій мережі після природних катастроф або атак. Вона може бути сформульована у вигляді задачі змішаного цілочисельного програмування, де цільова функція спрямована на максимальне задоволення потреб мережі протягом усього часу відновлення [7]–[8]. Однак у таких роботах мета полягає у відновленні фізичної зв'язності мережі, тобто поверненні вузлів і каналів до роботи, а не у переміщенні функцій із знищених вузлів на вцілені. Зокрема, у задачах оптимального відновлення пошкодженої інфраструктурної мережі мета полягає в мінімізації сукупних витрат на встановлення або відновлення вузлів у певній послідовності, що визначається структурою самої мережі [9]. Це принципово відрізняється від досліджуваного сценарію: у даній роботі фізичне відновлення знищених вузлів не розглядається, натомість вирішується задача делегування їхнього функціоналу вціленим елементам системи з урахуванням залишкової пам'яті.

Питання відновлення функціональності інфраструктурних мереж після масштабних пошкоджень продовжує активно досліджуватися й останніми роками. Так, у роботі [11] запропоновано модель ризик-орієнтованого планування черговості відновлення критичної інфраструктури в

умовах невизначеності, однак задача формулюється виключно як фізичне відновлення пошкоджених об'єктів, без розгляду можливості передачі їхніх функцій вціленим елементам системи. Подібний акцент на прогнозній оцінці стійкості та плануванні відновлення взаємозалежних інфраструктурних мереж (водопостачання й транспорту) представлено в [12], а модель прийняття рішень щодо послідовності ремонтних робіт для критичної інфраструктури в умовах невизначеності запропоновано в [13]. У жодній із цих робіт, на відміну від запропонованого в даній статті методу, перерозподіл функціонального навантаження знищених вузлів на вцілені елементи не розглядається як самостійна комбінаторна задача розміщення.

Розвиток методів гілок і меж для розв'язання задач узагальненого призначення, застосовуваних і в цій статті, також залишається предметом активних досліджень: у [14] запропоновано вдосконалений алгоритм гілок і меж на основі скаляризації для двокритеріальних варіантів *GAP*, що підвищує ефективність пошуку розв'язків на тестових наборах даних. Питання перерозподілу навантаження між вціленими вузлами мережі після каскадних відмов розглядається також у [15], де запропоновано модель багатошарової потокової мережі та досліджено стратегії оптимального розподілу вільної ємності між вузлами з метою максимізації стійкості системи. Втім, на відміну від досліджуваної в даній статті задачі, функціональні комплекси вузлів у цій моделі вважаються подільними.

Отже, виявлено такі основні обмеження існуючих підходів порівняно із запропонованим методом: (1) алгоритми балансування навантаження та *GAP* допускають подільність функцій і не передбачають їх атомарної передачі у повному обсязі; (2) підходи до відновлення інфраструктури орієнтовані на фізичне відновлення вузлів, а не на перерозподіл їхнього функціоналу; (3) жодна з розглянутих робіт не пропонує критерію оптимальності у вигляді максимізації кількості вцілених вузлів із залишковим ресурсом пам'яті після перерозподілу. Дана робота заповнює зазначену прогалину, формалізуючи задачу перерозподілу функцій у вигляді задачі розміщення з бівалентними змінними та єдиним ресурсним обмеженням за пам'яттю.

Метою даної статті є розроблення методу перерозподілу функцій між вузлами розподіленої інформаційної системи, що зазнала часткового фізичного руйнування, шляхом формалізації задачі у вигляді задачі комбінаторної оптимізації з бівалентними змінними та єдиним ресурсним обмеженням за пам'яттю.

Постановка задачі дослідження

Нехай розподілена інформаційна система представлена у вигляді неорієнтованого графа, вершини якого відповідають вузлам системи, а ребра – каналам передачі даних між ними. Внаслідок часткового фізичного руйнування одна множина вузлів виявилася знищеною, тоді інша множина залишилася працездатною. Кожен знищений вузол характеризується обсягом пам'яті, необхідним для виконання закріпленого за ним комплексу функцій. Кожен вцілілий вузол має резервний обсяг вільної пам'яті.

Функціональний комплекс кожного знищеного вузла є неподільним: він має бути переданий одному вцілілому вузлу в повному обсязі або не передаватися взагалі.

Задача № 1 (базовий випадок, коли передача функцій усіх знищених вузлів можлива): знайти розподіл функціональних комплексів знищених вузлів між вцілілими таким чином, щоб для кожного знищеного вузла його комплекс функцій був переданий рівно одному вцілілому вузлу, жоден вцілілий вузол не перевищив свого резерву пам'яті, а кількість вцілілих вузлів, у яких після перерозподілу залишиться вільна пам'ять, була максимальною.

Задача № 2 (загальний випадок, коли повний перерозподіл неможливий): знайти розподіл функціональних комплексів знищених вузлів між вцілілими таким чином, щоб кожен знищений вузол отримав не більше одного призначення, жоден вцілілий вузол не перевищив свого резерву пам'яті, а кількість знищених вузлів, функції яких вдалося передати (або їх зважена сума з урахуванням пріоритетів), була максимальною.

Виклад основного матеріалу

В даній роботі шукані рішення щодо перерозподілу функціоналу втрачених вузлів характеризується такими ознаками:

1. Наявність можливості перенесення всього комплексу функцій системи з одного вузла на інший у повному обсязі, без розділення на частини.
2. В роботі розглядається лише один ресурс вузлових елементів – пам'ять.

В рамках розгляду першої математичної моделі перерозподілу комплексу функцій вузлів варто ввести додаткові умовні позначення. Вхідні дані:

I^Z – множина номерів знищених вузлів PIC;

J^C – множина номерів вцілілих вузлів PIC;

p_i – обсяг пам'яті, який був задіяний в i -му знищеному вузлі для виконання всіх функцій, тобто розв'язання всього комплексу задач, $i \in I^Z$;

r_j – обсяг вільної (резервної) пам'яті j -го вцілілого вузла на момент розв'язання даної задачі, $j \in J^C$.

Шукане рішення може бути описано вектором значень бівалентних змінних:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I^Z, j \in J^C,$$

що мають такий зміст: якщо у результаті розв'язання задачі перерозподілу певна змінна x_{ij} приймає значення одиниці, це означає, що весь комплекс функцій i -го знищеного вузла в повному обсязі необхідно передати i -му вцілілому вузлу. У випадку $x_{ij} = 0$ таке перенесення не відбувається.

Для кожного i -го знищеного вузла формується підмножина J_i^R номерів вцілілих вузлів, резерв пам'яті яких є достатнім для виконання функцій i -го вузла:

$$J_i^R = \{j \in J^C : p_i \leq r_j\}, i \in I^Z.$$

Множина номерів вцілілих вузлів, які можуть бути залучені для перерозподілу функцій зруйнованих вузлів з номерами $i \in I^Z$, визначається формулою:

$$J^R = \bigcup_{i \in I^Z} J_i^R.$$

Система обмежень складається принаймні з двох груп виразів, які мають такий зміст:

1. Комплекси функцій всіх знищених вузлів мають бути розподілені між вцілілими вузлами:

$$\sum_{j \in J_i^R} x_{ij} = 1, i \in I^Z \quad (1)$$

2. Сумарний обсяг пам'яті, необхідний для виконання додаткових функцій, не повинен перевищувати наявний резерв для кожного вцілілого вузла:

$$\sum_{i \in J_j^R} p_i x_{ij} \leq r_j, j \in J^R. \quad (2)$$

Вектор значень шуканих бівалентних змінних $x = (x_{ij} | i \in I^Z, j \in J_i^R)$, який задовольняє системі обмежень (1)–(2), визначатиме управлінське рішення щодо перерозподілу функцій між вузлами PIC, що зазнала часткового руйнування.

Такий вектор є допустимим розв'язком задачі.

Серед допустимих розв'язків необхідно визначити оптимальний. У задачі перерозподілу функцій вузлів критеріїв оптимальності може бути декілька: кількість резервних вузлів, які залишилися вільними після перерозподілу, рівномірність розподілу навантаження на вузли тощо. В даній роботі в якості цільової функції обрано максимізацію кількості вузлів, в яких після перерозподілу залишиться резерв.

Нехай r_j^{res} – обсяг пам'яті j -го вцілілого вузла, що може залишитися вільною після перерозподілу функцій між вузлами PIC:

$$r_j^{res} = r_j - \sum_{i \in J_j^R} p_i x_{ij}; j \in J^R;$$

y_i – додаткова бінарна змінна, що відбиває факт наявності або відсутності залишків вільної пам'яті j -го вцілілого вузла:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } r_j^{res} > 0, \\ 0, & \text{якщо } r_j^{res} = 0 \end{cases}; j \in J^R.$$

Тоді цільова функція матиме вигляд:

$$f(x) = \sum_{j \in J^C} c_j y_j \rightarrow \max. \quad (3)$$

Вирази (1)–(3) у сукупності з умовою бівалентності шуканих змінних $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $i \in I^Z$, $j \in J_i^R$ утворюють математичну модель №1 даної задачі.

Приклад 1

Вхідні дані:

$$I^Z = \{1, 2, 3\}; p_1 = 5; p_2 = 7; p_3 = 11;$$

$$J^C = \{4, 5, 6, 7\}; r_4 = 4; r_5 = 8; r_6 = 12; r_7 = 16;$$

Тоді:

$$J_1^R = \{5, 6, 7\}; J_2^R = \{5, 6, 7\}; J_3^R = \{6, 7\};$$

$$J^R = \{5, 6, 7\}.$$

Важливо зауважити, що в даному випадку передбачається, що значення параметрів p_i , I^Z , r_j , J^C вимірюються в однакових одиницях (у мегабайтах, гігабайтах тощо) або ж приведені до таких одиниць.

Якщо існує деякий i -й знищений вузол, для якого $J_i^R = \emptyset$, тоді можна зробити висновок, що задача не має рішення, оскільки не існує жодного вцілілого вузла, резерву пам'яті якого могло б вистачити для виконання функцій вузла з номером i . Наприклад, при $p_3 = 17$ значення $J_3^R = \emptyset$.

Окрім того, для побудови математичної моделі необхідно сформувати підмножини I_j^R для знищених вузлів, функції яких може виконуватися j -м вцілілим вузлом:

$$I_j^R = \{i \in I^Z : p_i \leq r_j\}; j \in J^R.$$

Тоді в даному випадку:

$$I_5^R = \emptyset; I_6^R = \{1, 2\}; I_7^R = \{1, 2, 3\}; I_7^R = \{1, 2, 3\}.$$

Приклад 2

Варто розглянути систему обмежень (1)–(2) у розгорнутому вигляді для вхідних даних, наведених у попередньому прикладі.

Було знищено вузли під номерами 1, 2, 3. Вузли під номерами 4, 5, 6, 7 вцілили. Оскільки $J_4^R = \emptyset$, шукані змінні будуть мати таку індексацію:

$$x = (x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{25}, x_{26}, x_{27}, x_{36}, x_{37}),$$

оскільки:

- функції 1-го та 2-го знищених вузлів можуть бути передані вцілілим вузлам з номерами 5, 6 та 7;
- функції 3-го знищеного вузла – тільки вцілілим вузлам з номерами 6 та 7;
- вцілілий вузол з номером 4 не може прийняти функції жодного знищеного вузла внаслідок недостатнього резерву вільної пам'яті.

Необхідно сформулювати обмеження групи (1) для кожного знищеного вузла:

$$x_{15} + x_{16} + x_{17} = 1;$$

$$x_{25} + x_{26} + x_{27} = 1;$$

$$x_{36} + x_{37} = 1.$$

Отже, якщо в результаті розв'язання задачі перерозподілу одна зі змінних x_{ij} у виразі виявиться такою, що дорівнює одиниці, це означатиме, що функції i -го знищеного вузла необхідно делегувати j -му вцілілому. В такому випадку інші змінні у виразі дорівнюватимуть нулю.

Також необхідно сформулювати обмеження групи (2) для кожного вцілілого вузла з номером $j \in J^R = \{5, 6, 7\}$:

$$5x_{15} + 7x_{25} \leq 8;$$

$$5x_{16} + 7x_{26} + 11x_{36} \leq 12;$$

$$5x_{17} + 7x_{27} + 11x_{37} \leq 16.$$

В даному випадку вцілілий вузол $j = 4$ не розглядається, оскільки резерв його вільної пам'яті ($r_4 = 4$) є недостатнім для виконання функцій будь-якого втраченого вузла.

Як зрозуміло з першого виразу, вцілілий 5-й вузол може прийняти функції від 1-го вузла або від 2-го вузла, оскільки пам'ять, яка використовується у кожному з цих знищених вузлів, не перевищує резерву вільної пам'яті вцілілого вузла: $5 \leq 8$ та $7 \leq 8$.

Другий вираз вказує на те, що вцілілий 6-й вузол може прийняти функції:

- від 1-го, 2-го вузла або 3-го знищеного вузла окремо, оскільки $5 \leq 12$, $7 \leq 12$ та $11 \leq 12$ відповідно;

- від 1-го та 2-го вузлів одночасно, оскільки сумарна пам'ять, яка використовується у цих знищених вузлах, не перевищує резерву вільної пам'яті вцілілого 6-го вузла: $5 + 7 \leq 12$.

Згідно з третім виразом, вцілілий 7-й вузол може прийняти функції:

- від 1-го, 2-го вузла або 3-го знищеного вузла окремо, оскільки $5 \leq 16$, $7 \leq 16$ та $11 \leq 16$ відповідно;

- від 1-го та 2-го вузлів одночасно, оскільки сумарна пам'ять, яка використовується у цих знищених вузлах, не перевищує резерву вільної пам'яті вцілілого 6-го вузла: $5 + 7 \leq 16$;

– від 1-го та 3-го вузлів одночасно, оскільки сумарна пам'ять, яка використовується у цих знищених вузлах, не перевищує резерву вільної пам'яті вцілілого 6-го вузла: $5+11 \leq 16$.

Отже, на наступному етапі необхідно розв'язати дану систему обмежень, що складається з комбінаторних рівнянь та нерівностей.

Можливим є сценарій, у якому система обмежень (1)–(2) є несумісною, тож модель не матиме допустимих рішень.

Причин може бути декілька, зокрема:

– сумарний обсяг пам'яті, яка використовувалася зруйнованими вузлами, перевищує сумарний резерв вільної пам'яті вцілілих вузлів:

$$\sum_{i \in I^Z} p_i > \sum_{j \in J^C} r_j;$$

– обсяг пам'яті, що необхідний для функціонування певного i -го знищеного вузла $i' \in I^Z$, перевищує максимальний резерв вільної пам'яті будь-якого з вцілілих вузлів:

$$p_{i'} > \max\{r_j | j \in J^C\}.$$

У першому випадку задача може полягати у максимізації кількості зруйнованих вузлів, функції яких вдасться передати вцілілим вузлам.

Тоді обмеження (1) слід переписати у вигляді нерівності (оскільки функції не всіх зруйнованих вузлів будуть перенесені до вцілілих елементів):

$$\sum_{j \in J_i^R} x_{ij} \leq 1, \quad i \in I^Z. \quad (4)$$

Водночас обмеження (2) змін не потребують.

Тоді цільова функція (3) замінюється такою:

$$f(x) = \sum_{i \in I^Z} \sum_{j \in J_i^R} x_{ij} \rightarrow \max. \quad (5)$$

Є ймовірною ситуація, коли зруйновані вузли РІС не є рівноправними, а мають певні пріоритети. У цьому випадку необхідно враховувати важливість знищених вузлів, функції яких підлягають відновленню на вцілілих вузлах, для системи в цілому. У цьому випадку цільову функцію доцільно представити таким виразом:

$$f(x) = \sum_{i \in I^Z} w_i \sum_{j \in J_i^R} x_{ij} \rightarrow \max, \quad (6)$$

де w_i – ваговий коефіцієнт, який вказує на ступінь важливості i -го вузла; $i \in I^Z$.

У даному випадку коефіцієнти заздалегідь встановлюються користувачем системи і обираються з діапазону $0 < w_i < 1$.

Тоді задача планування перерозподілу функцій між вузлами РІС полягає у знаходженні вектора значень бівалентних змінних $x = (x_{ij} | i \in I^Z; j \in J_i^R)$,

за якого функція (5) або (6) набуває максимального значення за умови дотримання системи обмежень (2) та (4).

Обмеження (2) та (4) у сукупності з цільовими функціями (5) або (6) за умови бівалентності шуканих змінних $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $i \in I^Z$; $j \in J_i^R$ утворюють математичну модель № 2 даної задачі.

Наведені моделі доводять, що задача перерозподілу функцій зруйнованих вузлів між вцілілими вузлами РІС може бути зведена до канонічної форми задач комбінаторної оптимізації з лінійною структурою.

Канонічна форма задач комбінаторної оптимізації має такий вигляд:

– цільова або критеріальна функція:

$$f(x) = \sum_{k \in K_0} c_k x_k \rightarrow \max; \quad (7)$$

– система обмежень:

$$\sum_{k \in K_l} a_{lk} x_k \leq b_l; \quad l = \overline{1, h}; \quad (8)$$

– умови, що накладаються на значення шуканих змінних:

$$x = (x_k | k = \overline{1, q}); \quad x_k \in \{0, 1\}; \quad k = \overline{1, q},$$

де K_0 – множина номерів шуканих змінних, які входять у вираз цільової (критеріальної) функції $f(x)$ з коефіцієнтами, не рівними нулю:

$$K_0 = \{1 \leq k \leq q : c_k \neq 0\};$$

K_l – множина номерів шуканих змінних, які входять у l -е обмеження системи (8) з коефіцієнтами, не рівними нулю:

$$K_l = \{1 \leq i \leq q : a_{lk} \neq 0\}; \quad l = \overline{1, h};$$

a_{lk}, b_l, c_k – дійсні числа; $k = \overline{1, q}$; $l = \overline{1, h}$.

Задача комбінаторної оптимізації полягає у знаходженні такого вектору бівалентних значень незалежних змінних $x^* = (x_k^* | k = \overline{1, q})$, який обертає функцію (7) в максимум при дотриманні системи обмежень (8).

Для перетворення наведених моделей до канонічної форми (7)–(8) необхідно:

– перенумерувати всі шукані змінні x_{ij} , $i \in I^Z$, $j \in J^C$ числами натурального ряду від 1 до q ;

– кожній парі індексів (i, j) , де $i \in I^Z$, $j \in J^C$, зіставити у відповідність номер шуканої змінної канонічної форми k , $k = \overline{1, q}$;

– перенумерувати всі обмеження, що входять до складу систем (1)–(2) або (2) і (4), числами натурального від 1 до h ;

– встановити склад множин K_0 та K_l , $l = \overline{1, h}$;

– обчислити коефіцієнти та вільні члени a_{lk}, b_l, c_k ; $k = \overline{1, q}$, $l = \overline{1, h}$.

Для розв'язання задачі (7)–(8) доцільно використати алгоритм гілок і меж (*Branch-and-Bound*,

$B \& B$) – класичний метод точного розв’язання задач комбінаторної оптимізації з бівалентними змінними [10]. Алгоритм будує дерево пошуку, в якому кожен вузол відповідає частковому призначенню змінних. На кожному кроці обчислюється верхня оцінка значення цільової функції, досяжного у піддереві поточного вузла: якщо ця оцінка не перевищує найкращого знайденого розв’язку, гілка відсікається і подальший перебір у ній не проводиться. Завдяки такому механізму спрямованого перебору алгоритм уникає повного перегляду простору розв’язків, водночас гарантуючи знаходження глобального оптимуму. Детальний огляд сучасних варіантів $B \& B$ – зокрема стратегій розгалуження, вибору вузла та відсікання – представлений у роботі [10].

Алгоритм розв’язання математичної моделі № 1

Модель № 1 застосовується у разі, коли система обмежень (1)–(2) є сумісною, тобто існує можливість передати функції кожного знищеного вузла якомусь із вцілілих. Алгоритм розв’язання складається з таких кроків.

Крок 1. За вхідними даними I^Z, J^C, p_i, r_j для кожного знищеного вузла з номером $i \in I^Z$, обчислити підмножину J_i^R як множину вцілілих вузлів з номерами $j \in J^C$, резерв пам’яті яких не менший за потребу p_i знищеного вузла. Якщо для деякого знищеного вузла така підмножина виявилася порожньою, система обмежень (1)–(2) несумісна та задача не має розв’язку в рамках моделі № 1 – перейти до застосування моделі №2.

Крок 2. Для кожного вцілілого вузла з номером $j \in J^R$, обчислити множину знищених вузлів, обсяг пам’яті яких не перевищує резерв j -го вцілілого вузла.

Крок 3. Перенумерувати бівалентні змінні x_{ij} числами від 1 до q та сформулювати канонічну форму (7)–(8) за процедурою, описаною вище: визначити коефіцієнти цільової функції c_k , матрицю обмежень a_{lk} та праві частини b_l на основі обмежень (1) і (2).

Крок 4. Застосувати алгоритм $B \& B$ до канонічної форми (7)–(8). Крок 5. Якщо всім змінним присвоєно значення і всі обмеження виконано, отриманий вектор є допустимим розв’язком. Обчислити значення цільової функції $f(x)$ за формулою (3): для кожного вцілілого вузла $j \in J^C$ визначити залишковий резерв пам’яті як r_j мінус сумарний обсяг пам’яті, переданий на цей вузол. Якщо залишковий резерв додатний, вузол враховується у значенні $f(x)$. Якщо отримане значення $f(x)$ перевищує значення поточного найкращого розв’язку, оновити рекорд.

Крок 6. Після повного обходу дерева (з урахуванням усіх відсікань) зафіксований найкращий вектор x є оптимальним розв’язком моделі № 1. Він однозначно визначає, яким вцілілим вузлам передаються функції кожного знищеного вузла.

Алгоритм розв’язання математичної моделі № 2

Модель № 2 застосовується тоді, коли сумісна передача функцій усіх знищених вузлів є неможливою – зокрема, якщо сумарна потреба у пам’яті перевищує сумарний резерв вцілілих вузлів або для деякого знищеного вузла підмножина J_i^R виявилася порожньою. Метою є передача функцій якомога більшої кількості знищених вузлів (або найбільш пріоритетних з них). Алгоритм розв’язання аналогічний алгоритму для моделі № 1 з такими відмінностями.

Крок 1. Виконується так само, як і для моделі № 1. Підмножини J_i^R формуються для всіх знищених вузлів. Знищені вузли, для яких підмножина J_i^R виявилася порожньою, виключаються з подальшого розгляду – їхні функції передати неможливо за будь-якого розв’язку.

Кроки 2–3. Виконуються аналогічно до моделі №1, але канонічна форма будується на основі обмежень (2) і (4), де замість рівності використовується нерівність для кожного знищеного вузла. Коефіцієнти цільової функції c_k визначаються за формулою (5) – рівними одиниці для кожної змінної, або за формулою (6) – рівними ваговому коефіцієнту знищеного вузла, якому відповідає дана змінна.

Крок 4. Алгоритм $B \& B$ застосовується до канонічної форми (7)–(8). Умови відсікання гілки дерева пошуку: (а) порушено обмеження з групи (2) – резерв пам’яті деякого вцілілого вузла перевищено; (б) порушено обмеження з групи (4) – функції деякого знищеного вузла призначено більш ніж одному вцілілому; (в) верхня оцінка цільової функції у даному піддереві не перевищує значення поточного найкращого розв’язку. На відміну від моделі № 1 обмеження (4) є нерівністю, тому допускається ситуація, коли функції деякого знищеного вузла не передаються жодному вцілілому.

Крок 5. Якщо всім змінним присвоєно значення і всі обмеження виконано, отриманий вектор є допустимим розв’язком. Обчислити значення цільової функції $f(x)$ за формулою (5) або (6) як суму значень x_{ij} . Якщо отримане значення перевищує поточний рекорд, оновити його.

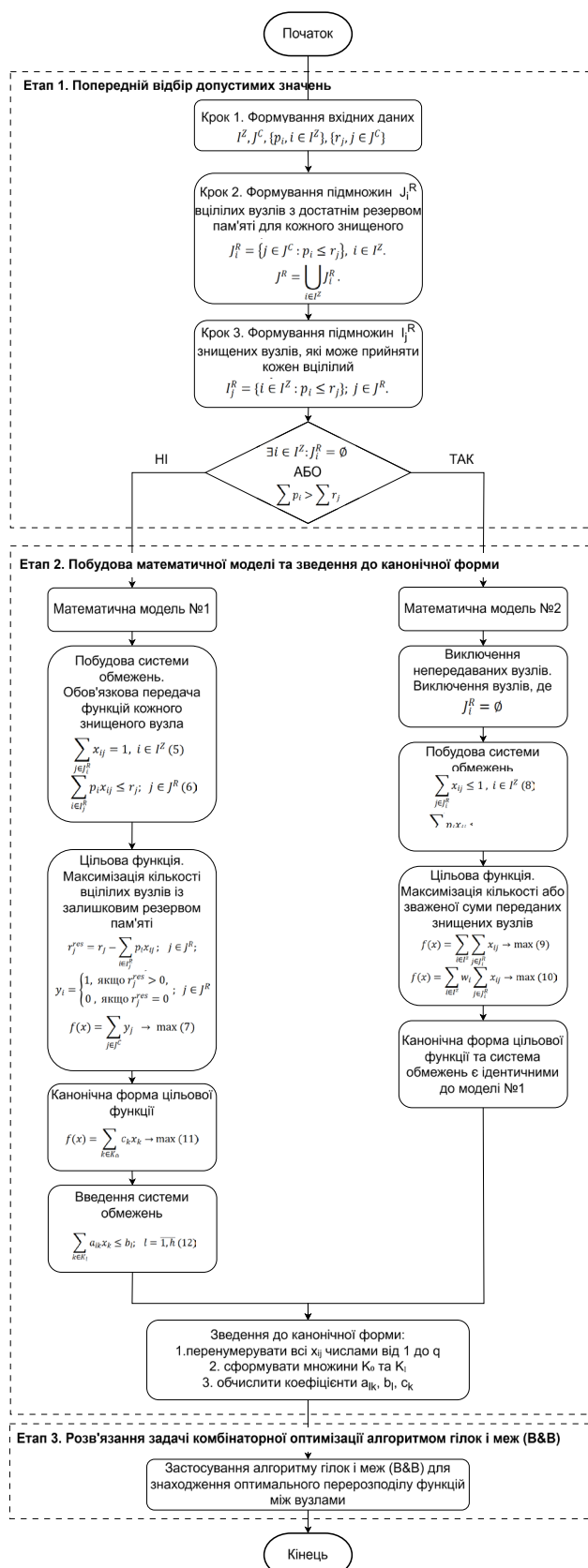


Рис. 1. Схема методу перерозподілу функцій між вузлами розподіленої інформаційної системи

Крок 6. Після повного обходу дерева зафіксований найкращий вектор є оптимальним розв'язком моделі № 2. Він визначає, яким вцілілим вуз-

лам передаються функції знищених вузлів, та вказує на ті знищені вузли, функції яких за наявних ресурсних обмежень передати неможливо.

Запропонований алгоритм реалізується у три етапи. На першому етапі за вхідними даними формуються підмножини вцілілих вузлів, резерв пам'яті яких є достатнім для прийняття функцій кожного знищеного вузла. Далі виконується ключова перевірка сумісності: якщо для всіх знищених вузлів такі підмножини непорожні і сумарна потреба в пам'яті не перевищує наявного резерву, будується математична модель № 1 з жорсткою вимогою обов'язкової передачі функцій кожного знищеного вузла; інакше застосовується математична модель № 2, яка допускає часткову передачу і орієнтована на максимізацію кількості обслугованих знищених вузлів з урахуванням їхніх пріоритетів. На другому етапі обидві моделі незалежно від вибору зводяться до єдиної канонічної форми задачі комбінаторної оптимізації з бівалентними змінними. На третьому етапі цю задачу розв'язує алгоритм гілок і меж (B&B), який буде деревом пошуку, відсікає безперспективні гілки за трьома умовами і після повного обходу видає оптимальний розв'язок – вектор призначень знищених вузлів вцілілим.

Далі наведено схему методу перерозподілу функцій між вузлами розподіленої інформаційної системи:

Висновки

У даній роботі було доведено, що задача перерозподілу функцій вузлів розподіленої інформаційної системи, яка зазнала часткового фізичного руйнування, може бути зведена до задачі розміщення з бівалентними змінними та єдиним ресурсним обмеженням за пам'яттю.

Запропонований метод передбачає розв'язання цієї задачі у два етапи. На першому з них для кожного знищеного вузла формується підмножина вцілілих вузлів, резерв пам'яті яких є достатнім для прийняття повного комплексу функцій відповідного знищеного елемента. Тим самим здійснюється попередній відбір допустимих призначень та звуження простору пошуку розв'язків. На другому етапі безпосередньо розв'язується задача оптимального розподілу функціональних комплексів знищених вузлів між вцілілими елементами системи шляхом розв'язання сформованої математичної моделі з бівалентними змінними.

Попереднє формування підмножин вцілілих вузлів із достатнім резервом пам'яті фактично виділяє в задачі фрагмент допустимої області, якому належать всі можливі розв'язки. Тим самим досягається ефект суттєвого зменшення розмірності задачі і, як наслідок, скорочення витрат машинного часу на її розв'язання, що є одним із

ключових факторів при відновленні функціональних можливостей частково зруйнованої РІС критичного призначення.

Як критерій оптимальності в роботі обрано максимізацію кількості вцілілих вузлів, у яких після перерозподілу зберігається залишковий резерв пам'яті. Це забезпечує не лише виконання поточного перерозподілу, а й збереження потенціалу системи для подальшого адаптування у разі нових пошкоджень.

Запропонований метод розглядає базовий варіант задачі, за якого весь комплекс функцій знищеного вузла передається одному вцілому елементу без поділу на частини, а єдиним ресурсним обмеженням є пам'ять. З мінімальними змінами даний метод може бути розповсюджений на випадки врахування додаткових ресурсів – продуктивності процесора, пропускної здатності каналів передачі даних тощо. Окрім того, можливим є розширення використання моделей також на сценарії часткового перенесення функціональних комплексів між декількома вціленими вузлами.

Доцільність і практична корисність запропонованого методу визначається декількома чинниками. По-перше, метод забезпечує гарантоване знаходження оптимального розподілу функціональних навантажень за рахунок застосування точного алгоритму гілок і меж, що є критично важливим для систем, де неприпустимі помилки планування. По-друге, попереднє формування підмножин вцілених вузлів із достатнім резервом пам'яті суттєво скорочує розмірність задачі ще до початку перебору, що зменшує час розв'язання і дозволяє застосовувати метод в оперативному режимі. По-третє, наявність двох моделей – для повного та часткового перерозподілу – робить метод придатним до широкого спектру реальних сценаріїв пошкодження системи.

Перспективами подальшого розвитку ідеї є: розширення моделі на випадок врахування кількох ресурсів одночасно – пам'яті, продуктивності процесора, пропускної здатності каналів передачі даних; розроблення методу часткового перенесення функціональних комплексів, коли функції знищеного вузла розподіляються між декількома вціленими елементами; дослідження динамічного варіанту задачі, за якого стан системи змінюється в часі внаслідок нових пошкоджень або часткового відновлення вузлів; а також розроблення програмного інструменту для автоматизованого розв'язання задачі перерозподілу в умовах реального функціонування критичної інфраструктури.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Kirti, A. K., Maurya, R. S., & Yadav, R. S. (2023). Fault tolerance of deadline constrained tasks based on load balancing in cloud computing. In *Proceedings of the 14th International Conference on Computing Communication and Networking Technologies (ICCCNT)*. IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICCCNT56998.2023.10307764>
- [2] Khalil, M. I. K., Ahmad, I., & Almazroi, A. A. (2019). Energy efficient indivisible workload distribution in geographically distributed data centers. *IEEE Access*, 7, 82672–82680. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2924130>
- [3] Nauss, R. M. (2003). Solving the generalized assignment problem: An optimizing and heuristic approach. *INFORMS Journal on Computing*, 15(3), 249–266. <https://doi.org/10.1287/ijoc.15.3.249.16075>
- [4] Öncan, T. (2007). A survey of the generalized assignment problem and its applications. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 45(3), 123–141. <https://doi.org/10.3138/infor.45.3.123>
- [5] Liu, H., Ma, R., Shi, H., & Zhang, G. (2022). Online generalized assignment problem with historical information. *Theoretical Computer Science*, 922, 438–446. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2022.04.041>
- [6] Bradley, S., Hax, A., & Magnanti, T. (1977). *Applied mathematical programming*. Addison-Wesley. <https://web.mit.edu/15.053/www/AMP-Chapter-09.pdf>
- [7] Erden, E., & Altinel, İ. K. (2018). Restoration of services in disrupted infrastructure systems: A network science approach. *PLOS ONE*, 13(2), Article e0192272. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0192272>
- [8] Almoghathawi, Y., Selim, S., & Barker, K. (2023). Community structure recovery optimization for partial disruption, functionality, and restoration in interdependent networks. *Reliability Engineering and System Safety*, 229, Article 108810. <https://doi.org/10.1016/j.res.2022.108810>
- [9] Kempe, D., Kleinberg, J., & Demers, A. (2012). Optimal recovery of damaged infrastructure network. *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/1207.2799>
- [10] Morrison, D. R., Jacobson, S. H., Sauppe, J. J., & Sewell, E. C. (2016). Branch-and-bound algorithms: A survey of recent advances in searching, branching, and pruning. *Discrete Optimization*, 19, 79–102. <https://doi.org/10.1016/j.disopt.2016.01.005>
- [11] Alkhaleel, B. A., Liao, H., & Sullivan, K. M. (2022). Risk and resilience-based optimal post-disruption restoration for critical infrastructures under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 296(1), 174–202. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.04.011>
- [12] Rahimi-Golkhandan, A., Aslani, B., & Mohebbi, S. (2022). Predictive resilience of interdependent water and transportation infrastructures: A socio-technical approach. *Socio-Economic Planning Sciences*, 80, 101166. <https://doi.org/10.1016/j.seps.2021.101166>
- [13] Xu, M., Ouyang, M., Hong, L., Mao, Z. J., & Xu, X. L. (2022). Resilience-driven repair sequencing decision under uncertainty for critical infrastructure systems. *Reliability Engineering & System*

- Safety, 221, 108378. <https://doi.org/10.1016/j.res.2022.108378>
- [14] Bauß, J., & Stiglmayr, M. (2023). Augmenting bi-objective branch and bound by scalarization-based information. arXiv. <https://arxiv.org/abs/2301.11974>
- [15] Irsoy, O., & Yağan, O. (2025). Analysis and optimization of robustness in multiplex flow networks against cascading failures. IEEE Transactions on Network Science and Engineering. <https://arxiv.org/abs/2502.06159>

Литвиненко Р. В.

МЕТОД ПЕРЕРОЗПОДІЛУ ФУНКЦІЙ МІЖ ВУЗЛАМИ РОЗПОДІЛЕНОЇ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ, ЩО ЗАЗНАЛА ЧАСТКОВОГО ФІЗИЧНОГО РУЙНУВАННЯ

У даній статті розглянуто проблему відновлення працездатності розподіленої інформаційної системи (PIC), яка зазнала часткового фізичного руйнування та має виведені з ладу центри обробки даних. Таке відновлення відбувається шляхом перерозподілу функцій пошкоджених вузлів між цілілими елементами системи. В умовах фізичних пошкоджень всієї системи або окремих її елементів важливим є не лише відновлення зв'язності системи, але і забезпечення виконання критичних функцій, які було на неї покладено та закріплено за втраченими вузлами. Втрата обчислювальних ресурсів може призвести до деградації сервісів, зниження продуктивності та порушення цілісності обробки даних.

У роботі розглядається базовий варіант задачі перерозподілу, за якого весь комплекс функцій втраченого вузла може бути перенесено на один із цілих елементів без поділу його на частини. Також за основний ресурс береться пам'ять. Побічні ефекти, пов'язані з можливим уповільненням роботи цілих вузлів внаслідок збільшення обсягу задіяної пам'яті, на даному етапі не розглядаються.

Запропонований метод спрямований на адаптацію PIC до нових умов роботи шляхом делегування функціональних навантажень із пошкоджених вузлів на цілілі із врахуванням їхньої залишкової пам'яті. Підхід ґрунтується на представленні системи у вигляді зваженого графа, де цілілі вершини характеризуються доступною пам'яттю, а пошкоджені - обсягом пам'яті, необхідної для відновлення їх функціоналу.

Актуальність дослідження зумовлена зростанням ролі розподілених інформаційних систем у критично важливих сферах, зокрема у військовій, енергетичній, транспортній тощо, де фізичні руйнування інфраструктури можуть призводити до втрати вузлів разом із закріпленими за ними функціями. Можливість оперативного перенесення повного комплексу функцій на цілілі елементи забезпечить безперервність роботи ключових сервісів без потреби у негайному відновленні пошкодженого обладнання.

Наукова новизна запропонованого методу полягає у формалізації задачі перерозподілу функцій пошкоджених вузлів у вигляді задачі розміщення з єдиним ресурсним обмеженням за пам'яттю та заборонаю на дроблення функціональних комплексів. Даний підхід дозволяє звузити простір можливих розв'язків за рахунок попереднього відбору цілих вузлів, які мають достатній обсяг залишкової пам'яті для прийняття повного набору функцій виведеного з ладу елемента. Це забезпечує обчислювальну простоту та створює основу для подальшого розширення моделі з урахуванням додаткових ресурсів та показників продуктивності.

Ключові слова: розподілена інформаційна система; перерозподіл функцій; бівалентні змінні; комбінаторна оптимізація; алгоритм гілок і меж; часткове фізичне руйнування; задача призначення функцій.

Lytvynenko R.

METHOD FOR REDISTRIBUTING FUNCTIONS BETWEEN NODES OF A DISTRIBUTED INFORMATION SYSTEM THAT HAS UNDERGONE PARTIAL PHYSICAL DESTRUCTION

This article addresses the problem of restoring operability of a distributed information system (DIS) that has undergone partial physical destruction with data processing centres put out of service. Such restoration is carried out by redistributing the functions of damaged nodes among the surviving elements of the system. Under conditions of physical damage to the entire system or its individual elements, it is important not only to restore the connectivity of the system, but also to ensure the execution of critical functions that were assigned to it and fixed at the lost nodes. The loss of computing resources can lead to service degradation, reduced performance and disruption of data processing integrity.

The paper considers a basic variant of the redistribution problem in which the entire set of functions of a lost node can be transferred to one of the surviving elements without splitting it into parts. Memory is also taken as the primary resource. Side effects related to possible slowdown of surviving nodes due to increased memory usage are not considered at this stage.

The proposed method is aimed at adapting the DIS to new operating conditions by delegating functional loads from damaged nodes to surviving ones, taking into account their residual memory. The approach is based on representing the system as a weighted graph, where surviving vertices are characterised by available memory and damaged ones by the amount of memory required to restore their functionality.

The relevance of the study is driven by the growing role of distributed information systems in critical areas, including military, energy, transport, etc., where physical destruction of infrastructure can lead to the loss of nodes along with the functions assigned to them. The ability to promptly transfer a complete set of functions to surviving elements will ensure continuity of key services without the need for immediate restoration of damaged equipment.

The scientific novelty of the proposed method lies in formalising the problem of redistributing functions of damaged nodes as a placement problem with a single resource constraint on memory and a prohibition on splitting functional complexes. This approach allows narrowing the space of possible solutions by pre-selecting surviving nodes that have sufficient residual memory to accept the full set of functions of the disabled element. This ensures computational simplicity and creates a basis for further model extension with additional resources and performance indicators.

Keywords: distributed information system; function redistribution; binary variables; combinatorial optimisation; branch-and-bound algorithm; partial physical destruction; assignment problem.

Дата першого надходження: 08.06.2026 р.

Дата прийняття до друку: 10.08.2026 р.

Дата публікації: 10.09.2026 р.