УДК 629.7.01:62.551 DOI 10.18372/2073-4751.87.21678

Білак Н.В.,
orcid.org/0009-0001-2207-7995,
e-mail: nataliia.bilak@npp.kai.edu.ua,
Абрамович О.О.,
orcid.org/0009-0002-8036-0665,
e-mail: olena.abramovych@npp.kai.edu.ua,
Кліпа А.М.,
orcid.org/0009-0003-4807-2257,
e-mail: antonina.klipa@npp.kai.edu.ua

ДИНАМІЧНЕ ПРОЕКТУВАННЯ БЕЛЛМАНА ОПТИМАЛЬНОГО ЗАКОНУ СТАБІЛІЗАЦІЇ КРЕНУ БПЛА

Національний університет «Київський авіаційний інститут»

Вступ

Однією з основних завдань управління безпілотними літальними апаратами (БПЛА) є стабілізація заданого кутового положення. Для забезпечення необхідних характеристик точності, стійкості і керованості використовують різні типи регуляторів. Найбільш поширені типові регулятори [1,2] – ПД, ПІД. Їх популярність викликана їхньою здатність забезпечувати стабільність, швидкість реакції, адаптивність до зовнішніх умов попри відносно простоту та компактність структури, при одночасній простій реалізації на польотних контролерів БПЛА.

Кожна із складових типових регуляторів (пропорційна, диференціальна, інтегральна) спрямована на підвищення його ефективності: забезпечення реакції пропорційно поточній помилці, забезпечення реакції на швидкість зміни помилки, усунення статичної помилки для досягненни заданого значення. Проте, ключовою проблемою в використанні типових регуляторів є налагодження їх коефіцієнтів.

Існує безліч різних аналітичних, експериментальних та програмних методів налаштування параметрів регуляторів [2, 4]. Проблема синтезу регуляторів систем управління - одна з основних предметних завдань теорії автоматичного управління.

В роботі представлені вирішення задачі синтезу оптимального закону стабілізації крену БПЛА метод динамічного програмування Беллмана, а також вирішення цієї ж задачі шляхом синтезу оптимального за квадратичним критерієм управління (лінійно-квадратична задача).

Метод динамічного програмування (ДП) [5, 6, 8, 9] полягає у розбитті складної задачі керування на ряд послідовних простіших етапів для знаходження оптимального управляючого впливу. Основою методу є принцип оптимальності Беллмана, за яким оптимальне управління на даному кроці залежить лише від поточного стану системи, а не від того, як система прийшла в цей стан. При цьому оптимальна траєкторія має властивість, за якою її ділянки також є оптимальними. Принцип покроковості рішення задачі дозволяє розв'язує підзадачі пошуку не всього керуючого сигналу віддразу, а для кожного часового інтервалу, зменшуючи обчислювальну складність.

Мета

Метою роботи є синтез оптимального закону стабілізації крену

безпілотного літака Aerosonde методом динамічного програмування Беллмана та за квадратичним критерієм управління [1, 4].

Основна частина

Принцип динамічного програмування Беллмана [6, 8, 9]. В основі ДП лежить принцип оптимальності, сформульований Р. Беллманом, а саме: «оптимальні стратегії управління володіють тією властивістю, що яким би не був початковий стан системи і управління в початковий момент, подальше управління повинно бути оптимальним в сенсі заданого критерію щодо будь-якого іншого стану, який може бути природним наслідком управління в початковий момент».

Розглянемо лінійну динамічну систему (ДС) вигляду

$$\frac{dy}{dt} = By + mu \quad (1)$$

Згаданий принцип для лінійних ДС (1) може бути сформульований по іншому: будь-який відрізок оптимальної траєкторії є теж оптимальна траєкторія. Це означає, що незалежно від того, яким було управління на початковому відрізку $[t_0, T]$, подальше управління на відрізку $[t, T]$ повинно володіти властивістю оптимальності за обраним критерієм.

Отже, якщо ставиться завдання пошуку оптимального управління на всьому відрізку $[t_0, T]$, то управління u має бути оптимальним в кожен момент часу $t[t_0, T]$. Застосування принципу оптимальності Беллмана для ДС (1) приводить до необхідності вирішення деякого рівняння в часткових похідних – рівняння Беллмана щодо функції v вектора змінних стану y. Дану функцію, зазвичай, називають похідною і її визначення дозволяє знайти оптимальне управління u^0, як функцію від вектора стану y, тобто вирішити задачу синтезу.

При вирішенні задачі стабілізації квадратичний критерій оптимальності має вигляд:

$$I = \sum_0^T (y * ay + cu^2)dt \quad (2),$$

де **a** – квадратна матриця що задовольняє умовам Сильвестра [3]; $c > 0$ – деяка константа; $T \leq \infty$ – кінцевий час; u – управління (скаляр); $(*)$ – знак транспонування; y^*– матриця-рядок.У системі (1) матриця B_i вектор m – числові.

Ставиться задача про оптимальний перехід системи (1) з початкового положення $y(t_0)$ в в початок координат $y(T) = 0$. Для розв'язання цієї задачі використовується принцип Беллмана для лінійної системи (1) і критерію (2) у вигляді співвідношення:

$$min_u [\, y * ay + cu^2 + \frac{\partial v(y)}{\partial y}(By + mu)\,] = 0 \quad (3).$$

Вираз, що знаходиться під знаком мінімуму, являє собою квадратичну функцію управління u. Виділяючи складові, що залежать тільки від управління, отримаємо:

$$f(u) = cu^2 + \frac{\partial v(y)}{\partial y} mu.$$

Необхідна та достатня умови мінімуму цієї функції по управлінню мають вигляд:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2cu + \frac{\partial v(y)}{\partial y} m = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 2c > 0.$$

Оптимальне управління визначаємо з умови (4) у вигляді

$$u^0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2c}\frac{\partial v}{\partial y} m. \quad (5)$$

де вираз $\frac{\partial v}{\partial y} m$ розглядається як скалярний добуток векторів $\frac{\partial v}{\partial y}$ і m.

Підставляючи управління (5) в умову (3) і звівши подібні члени, отримаємо рівняння Беллмана для лінійної ДС (1)

$$y^* ay + \frac{dv}{dy} By - \frac{1}{4c}\left(\frac{dv}{dy} m\right)^2 = 0 \quad (6)$$

У цьому випадку визначення оптимального управління для лінійної системи здійснюється наступним чином: 1) з рівняння в часткових похідних (6) знаходиться функція $v(y)$; 2) функцію $v(y)$ підставляємо у вираз (5) і визначаємо оптимальне управління $u^0(y)$

Етап 1. Рівняння Беллмана (6) для лінійної ДС (1), де матриця **B** і вектор **m** для стаціонарного випадку не залежать від часу *t*, можна задовольнити квадратичною формою

$$v(y) = \sum_a \sum_\beta A_{a\beta} y_a y_\beta = y^* Ay, \quad (7)$$

де **A** – симетрична матриця.

Для визначення рішення необхідно підставити вираз (7) в рівняння (6) і прирівняти коефіцієнти подібних доданків по змінним y_1, ... y_n. У результаті отримаємо систему алгебраїчних нелінійних рівнянь для визначення всіх коефіцієнтів $A_{a\beta}(a \le \beta)$ симетричної квадратичної форми (7) вигляду

$$a_{\alpha\beta} + \sum (A_{k\alpha} b_{k\beta} + A_{k\beta} b_{k\alpha}) - -\frac{1}{c}\sum (A_{k\alpha} m_k) \sum (A_{k\beta} m_k) = 0, \quad (8)$$

де індекси $\alpha = 1, \dots n$, $\beta = 1, \dots n$ і $\alpha \le \beta$ в силу симетричності матриць **a** та **A**. Кількість рівнянь, які складають систему (7) дорівнює $n(n+1)/2$.

Етап 2. Після підстановки оптимального управління $u^0(y)$ у вихідну систему (1) рішення отриманої замкнутої системи повинні задовольняти (відповідно до вимог задачі стабілізації) деяким умовам стійкості, зокрема, вони повинні з часом наближатися до початку координат $y(T) = 0$. Тут слід зазначити, що рівняння Беллмана (6) може мати кілька рішень $v(y)$. Необхідно з цих можливих розв'язків обрати той, що буде забезпечувати умову стійкості. Вибір необхідного розв'язку може бути здійснений на основі теорії стійкості Ляпунова А.А.

Теорема. Для того, щоб управління $u^0(y)$, визначене методом ДП, давало оптимальне рішення задачі стабілізації, достатньо, щоб відповідна йому функція $v(y)$:

1) задовольняла рівняння Беллмана (6);

2) була функцією Ляпунова для замкнутої системи.

Функцію $v(y)$, що задовольняє умовам цієї теореми, зазвичай називають оптимальною функцією Ляпунова.

Очевидно, що на етапі 1 система (8) може бути розв'язана будь-яким числовим методом [3, 5, 7] та мати кілька рішень, з яких слід обрати таке рішення, яке задовольняє умовам Сильвестра [3].

У цьому випадку функція (7) буде знаковизначеною позитивною. Тоді відповідно до теореми функція $v(y)$ буде функцією Ляпунова для замкнутої системи. Отже, визначаючи оптимальне управління з виразу (5), отримаємо

$$u^0(y) = \sum_{k=1}^{n} p_k y_k \quad (9)$$

де

$$p_k = -\frac{1}{c}\sum_{\alpha=1}^{n} A_{\alpha k} m_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n, \quad (10)$$

В цьому випадку коефіцієнти p_k називають коефіцієнтами підсилення системи стабілізації. Таким чином, управління, що стабілізує систему (1) за умови мінімуму квадратичного критерію (2), є лінійним з коефіцієнтами підсилення (10).

Результати досліджень.

Виконаємо синтез оптимального закону стабілізації крену БПЛА методом ДП Беллмана. Для заданого об'єкта управління, боковий рух якого в режимі

стабілізації кута крену описується системою диференціальних рівнянь другого порядку з матрицею $\boldsymbol{B}$ і вектором $\boldsymbol{m}$ визначити оптимальний закон стабілізації крене за допомогою принципу ДП Беллмана.

Ізольований рух крену ЛА описується наступною системою лінеаризованих ДР

$$\frac{d\triangle\omega_{x1}}{dt} = b_{11} \triangle \omega_{x1} + m_1 \triangle \delta_{\text{e}},$$
$$\frac{d\triangle\gamma}{dt} = \triangle \omega_{x1} \quad (11)$$

Умова даної задачі передбачає режим так званого плоского розвороту, коли моменти крену компенсуються льотчиком або системою автоматичного управління, тобто, виконується умова $\gamma = 0$.

Тут $\triangle \gamma$, ω_{x1} – кут крену і кутова швидкість крену в збуреному русі, відповідно; $\triangle \delta_{\text{e}}$ – кут відхилення елеронів відносно деякого програмного значення; b_{11}, m_1 - сталі коефіцієнти, такі що $b_{11} < 0$, $m_1 > 0$.

Необхідно знайти такий закон управління відхиленнями елеронів (закон стабілізації крену)

$$\triangle \delta_{\text{e}} = \triangle \delta_{\text{e}}(\triangle \omega_{x1}, \triangle \gamma),$$

який мінімізує критерій якості

$$J[\Delta\delta_e] = \frac{1}{2}\int [a_{11}\Delta\omega_{x1}^2 + a_{22}\Delta\gamma^2 + + c\Delta\delta_e^2]dt \quad (12)$$

Тут вагові коефіцієнти - «ціни» відхилень кутової швидкості крену і кута крену, відповідно, від незбуреного руху на нескінченному інтервалі $[t_0, \infty]$ часу стабілізації; $t_0 = 0$, p_1 - "ціна" затрат «енергії» на стабілізацію. Припускається, що a_{11}, a_{22}, c – деякі додатні константи.

На значення управляючої змінної $\triangle \delta_{\text{e}}$ не накладається жодних обмежень. Рівняння (11) у векторній формі записуються у вигляді

$$\left[\Delta\omega_{x1}\ \Delta\gamma\right] = [b_{11}\ 0\ 1\ 0\ ][\Delta\omega_{x1}\ \Delta\gamma\ ] + [m_1\ 0\ ]\delta_e, \quad (13)$$

позначимо їх

$$B = [b_{11}\ 0\ 1\ 0\ ],\ m = [m_1\ 0\ ],\ a = [a_{11}\ 0\ 0\ a_{22}\ ].$$

Для заданого випадку

$$B = [-0.638\ 0\ 1\ 0\ ],\ m = [1\ 0\ ],\ a = [2\ 0\ 0\ 2\ ],$$
$$c = 4.$$

Для розв'язання задачі реалізовано наступний план: 1) перевірка керованості та стійкості лінійної системи (13); 2) визначення оптимального управління за допомогою принципу ДП Беллмана; 3) побудова фазового портрета отриманої системи з обраним управлінням.

За результатами перевірки дана лінійна система (11) є керованою, проте знаходиться на границі стійкості, оскільки має такі власні числа $\lambda 1=0$, $\lambda 2=-0.638$.

Для визначення оптимального управління за допомогою принципу Беллмана необхідно розв'язати систему алгебраїчних рівнянь (8) відносно параметрів A_{11}, A_{22}, A_{12}.

Аналіз чисельних розв'язків [3, 5] цієї системи показує, що вона має один дійсний розв'зок:

$$A_{11} = 2.416,\ A_{22} = 2,\ A_{12} = 3.692.$$

Перевіримо виконання умови Сільвестра [3], що для даного випадку тотожно нерівності:

$$A_{11} > 0,\ A_{11}A_{22} - {A_{12}}^2 > 0,\ 2.416 > 0;$$
$$4.92 > 0.$$

Знайдений розв'язок задовольняє умовам і відповідна цьому розв'язку функція Ляпунова дає рішення задачі оптимального управління для даної лінійної системи у формі ПД-регулятора. Тоді оптимальне управління набуває вигляду

$$u^0(y_1, y_2) = -1.208\frac{d\Delta\gamma}{dt} - \Delta\gamma = -1.208y_1 - y_2. \quad (14)$$

Класичну систему зі зворотним зв'язком отримують замиканням системи функцією управління $u^0(y_1, y_2)$, вона представлена системою:

$$\frac{dy_1}{dt} = -1.846y_1 - y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dt} = y_1. \quad (15)$$

Фазовий портрет лінійної системи другого порядку – це зображення поведінки динамічної системи на фазовій площині в координатах (y_1, y_2). Фазовий портрет замкнутої лінійної (15) визначається її власними числами: $\lambda 1=-0.923+0.3848i$, $\lambda 2=-0.923-0.3848i$, значення яких відповідають особливій точці типу

«стійкий фокус». Лінійна замкнена система є асимптотично стійкою, оскільки з часом фазова точка прямує до початку координат $\|y\| \to 0$ при $t \to \infty$. При цьому функції $y_1(t)$, $y_2(t)$ здійснюють коливання відносно осі t. Якість роботи досліджуваної системи становить: $\|H2\|$=0.736.

Виконаємо синтез оптимального регулятора у досліджуваній системі за квадратичним критерієм управління [1, 4].

При застосуванні цього методу всі матриці в математичній моделі об'єкта (11) і в квадратичному критерії якості є постійними і не залежать від часу. Процес розглядається на нескінченному інтервалі $t \to \infty$. Оскільки всі матриці сталі, то диференціальне рівняння Ріккаті перетворюється в алгебраїчне. Для цього випадку дослідження можна подати у вигляді такої теореми.

Нехай об'єкт управління описується в просторі станів четвіркою числових матриць (A, B, C, D). Припустимо, що на вхід регулятора можна подати всі фазові координати об'єкта, тобто існує зворотний зв'язок за станом об'єкта управління.

Структурну схему такої системи зображено на рис. 1.

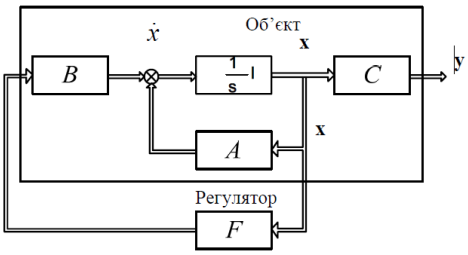

Рис. 1. Замкнена система управління із зворотним зв'язком за станом

Інтегральний квадратичний критерій якості має вигляд:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

Тоді оптимальне управління об'єктом за критерієм буде:

$$u = -F_0 x; \quad F_0 = argminJ(F); \quad F_0 = -R^{-1} B^T P$$

де матриця $\mathbf{P}^*$ є стабілізуючим розв'язком алгебраїчного рівняння Ріккаті:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

Синтез оптимального регулятора зводиться до таких дій:

1) задаються матриці, що описують динаміку об'єкта, а також вагові матриці для функціонала якості;

2) знаходиться рішення відповідних рівнянь Ріккаті;

3) знаходиться матриця оптимальних коефіцієнтів підсилення регулятора **F**.

Усі ці операції виконуються в пакеті програм MATLAB за допомогою оператора lqr. У результаті синтезу оптимального регулятора одержуємо F – коефіцієнти підсилення оптимального детермінованого регулятора; P – розв'язок рівняння Рікатті; E – вектор власних чисел замкненої системи.

Для системи, заданої у просторі станів матрицями

$$B = (-0.638\ 0\ 1\ 0), m = (1\ 0),$$

необхідно синтезувати такий оптимальний детермінований регулятор, котрий після включення в систему у від'ємний зворотній зв'язок, забезпечить стійкість системи.

Для розв'язання задачі необхідно вказати значення матриць вагових коефіцієнтів. Задамо довільні числа, залишаючи за собою право змінювати їх.

Результатом оптимального синтезу є пропорційно-диференціальний закон управління подібний до виразу (14) $u^0(y_1, y_2) = 1.2078y_1 + y_2$.

Замкнена система описується матрицею станів $\mathbf{B}_1$ та вектором управління $\mathbf{m}_1$.

$$|-1.846\ -1\ 1\ 0\ |, |1\ 0\ |$$

та має власні числа $\lambda_1 = -0.9229 + 0.385i$, $\lambda_2 = -0.9229 - 0.385i$.

Інтегрально-квадратичний показник якості системи $\|H_2\| = 0.736$.

Оцінені прямі показники якості перехідного процесу у досліджуваній системи при одиничному зворотному зв'язку та при синтезованому ПД-регуляторі представлені на рис. 2.

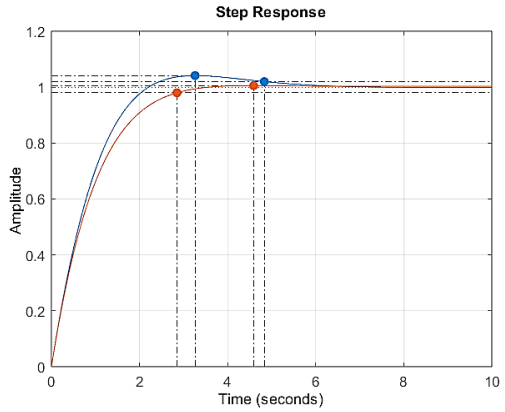

Рис.2. Перехідні процеси у досліджуваній системі

Введення ПД-регулятора у систему призводить до покращення прямих показників якості, а саме: скорочення часу регулювання з 4.83 сек. до 2.85 сек., а перерегулювання з 4.13% до 0.57%.

Висновки

Порівнюючи результати, отримані двома використаними методами можна зробити висновки про їх еквівалентність для лінійних систем, що свідчить про правильність розрахунків та однакову ефективність обраних методів для синтезу ПД-регулятора.

Метод ДП Беллмана виключно привабливий завдяки простоті і ясності свого основного принципу - принципу оптимальності. Хоча для лінійної системи другого порядку lqr-метод є ефективним і простим у реалізації, але у реальних технічних автоматизованих системах майже завжди присутні нелінійності або обмеження. ДП дозволяє врахувати ці особливості, знайти оптимальний закон управління для всього простору станів, що робить його більш стійким до значних змін початкового стану, забезпечуючи реальну, а не теоретичну оптимальність.

ДП є засобом практичного вирішення завдань оптимізації, хоча і має важливий недолік: кажучи словами Беллмана, «прокляття розмірності» - його складність катастрофічно зростає зі збільшенням розмірності задачі.

Література

1. Тунік А.А., Абрамович О.О. Основи сучасної теорії управління: Навчальний посібник. – К.: НАУ-друк, 2010. – 260 с.

2. Теорія автоматичного керування. Методологія та практика оптимізації: навчальний посібник / Б.І.Мокін, О.Б.Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 210с.

3. Білак Н.В., Кліпа А.М., Сущенко О.А. Спецрозділи математики: Навчальний посібник. – К.: НАУ-друк, 2018. – 280с.

4. Абрамович О.О., Білак Н.В., Кліпа А.М. Оптимальні системи керування літальними апаратами та рухомими об`єктами. – Лабораторний практикум.- К.: НАУ, 2024. – 60 с.

5. Лисенко О.І., Тачиніна О.М., Алєксєєва І.В. Математичні методи моделювання та оптимізації. Ч. 1. Математичне програмування та дослідження операцій: підручник/ за заг. ред. О.І. Лисенка. – К. : НАУ, 2019.–226 с.

6. Методи моделювання та оптимізації систем та процесів: лаб.практикум / уклад.: О.М. Тачиніна, Н.В. Білак, О.І. Лисенко, Ю.В. Мельник. – К.: НАУ, 2022. – 52 с.

7. Моделювання та оптимізація об'єктів та систем управління: навч. посіб. / уклад.: Д.М. Складанний, Ю.А. Запорожець, С.Л. Мердух, С.В. Плашихін. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 99 с.

8. Моделювання та оптимізація систем: підручник / В. М. Дубовой, Р. Н. Квєтний, О. І. Михальов, А. В. Усов. –Вінниця: ПП «ТД«Едельвейс», 2021. –804 с.

9. Оптимізаційні методи та моделі: підручник / В.С. Григорків, М.В. Григорків. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2020. –400с.

Білак Н.В., Абрамович О.О., Кліпа А.М.

ДИНАМІЧНЕ ПРОЕКТУВАННЯ БЕЛМАНА ОПТИМАЛЬНОГО ЗАКОНУ СТАБІЛІЗАЦІЇ КРЕНУ БПЛА

У статті вирішено задачу синтезу оптимального закону стабілізації кута крену безпілотного літального апарата (БПЛА) Aerosonde. Дослідження базується на порівняльному аналізі двох підходів: методу динамічного програмування Беллмана та методу лінійно-квадратичного регулятора (LQR). Авторами проведено математичне моделювання бокового руху літака, перевірено систему на керованість та асимптотичну стійкість за допомогою функцій Ляпунова. Результати моделювання в середовищі MATLAB підтвердили еквівалентність обох методів для лінійних систем та продемонстрували покращення прямих показників якості: час регулювання, перерегулювання. Продемонстровано, що використання синтезованого ПД-регулятора забезпечує високу точність та стійкість системи керування БПЛА.

Ключові слова: *БПЛА, оптимізація, динамічне програмування Беллмана, ПД-регулятор, лінійно-квадратична задача, оптимальний закон стабілізації.*

Bilak N.V., Abramovich O.O., Klipa A.M.

BELLMAN`S DYNAMIC PROGRAMMING FOR THE OPTIMAL UAV ROLL STABILIZATION LAW

The article addresses the synthesis of an optimal roll angle stabilization law for the Aerosonde unmanned aerial vehicle (UAV). The study is based on a comparative analysis of two approaches: Bellman's dynamic programming method and the linear-quadratic regulator (LQR) method. The authors performed mathematical modeling of the aircraft's lateral motion, verified the system for controllability, and ensured asymptotic stability using Lyapunov functions. Simulation results in the MATLAB environment confirmed the equivalence of both methods for linear systems and demonstrated an improvement in direct quality indicators, specifically settling time and overshoot. It is shown that the application of the synthesized PD controller provides high precision and stability for the UAV control system.

Keywords: *UAV, optimization, Bellman dynamic programming, PD controller, linear-quadratic problem, optimal stabilization law*

.

Стаття подана до редакції: 13/07/2026
Стаття прийнята до опублікування:05/08/2026
Стаття опублікована: 10/11/2026

Стаття поширюється на умовах ліцензії CC BY 4.0