DOI: 10.18372/2310-5461.70.21199
УДК 621.372.2

В. В. Козловський, д-р техн. наук, професор
НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
https://orcid.org/0000-0003-0234-415X
e-mail: valerey@ukr.net

РОЗПОДІЛ РЕЗОНАНСНИХ ЧАСТОТ НЕОДНОРІДНИХ ЛІНІЙ

Вступ

Проблема розподілу резонансних частот у неоднорідних лініях (лініях зі змінним хвильовим опором, змінною геометрією або діелектричною проникністю) полягає в тому, що на відміну від однорідних ліній, де резонанси короткозамкненої та розімкненої лінії розташовані на кратних частотах, у неоднорідних лініях цей порядок порушується. Основна проблема полягає в тому, що резонансні частоти (власні частоти) не утворюють класичного гармонічного ряду. Вони згущуються або розріджуються залежно від закону зміни параметрів лінії.

Розрахунок власних частот неоднорідних ліній потребує розв'язання диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами, що часто не мають аналітичного розв'язку (розв'язуються лише чисельно або наближеними методами). Через неоднорідності (фізичні відмінності на різних ділянках) ділянки лінії поглинають або випромінюють на різних частотах, викликаючи неоднорідне розширення резонансної лінії. Крім того, через зміну геометрії виникають зв'язки між низькочастотними та високочастотними коливаннями, що може призводити до непередбачуваних резонансних піків, паразитних коливань та порушення стабільності, наприклад, у магнетронах або хвилеводах. В акустичних системах змінного перерізу (кімнатах, трубах) неоднорідність призводить до нелінійного розподілу резонансів, що створює забарвлення звуку на певних, штучно виділених частотах.

Постановка проблеми

Таким чином, виникає проблема синтезу резонаторів на неоднорідних лініях передачі із заданим розподілом резонансних частот. Для розв'язання цієї проблеми необхідно в першу чергу визначити обмеження, що накладаються на спектр розподілених кіл.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Як відомо [1, 2], технічні характеристики сучасної телекомунікаційної апаратури значною мірою визначаються характеристиками коливальних систем (резонаторів): розподіл резонансних частот (спектр), смуга пропускання, смуга загородження, затухання у смузі пропускання та загородження, ступінь придушення паразитних резонансів, діапазон перебудови, резонансний опір, тип конструкції резонатора.

На даний час перелічені вище завдання частково вирішуються на основі резонаторів, побудованих на базі однорідних ліній (ліній зі сталим хвильовим опором), властивості яких уже заздалегідь визначені, а не ті, які потрібні. Одним із виходів із ситуації, що склалася, є використання як резонаторів неоднорідних ліній, властивості яких залежать від закону зміни хвильового опору. Визначення необхідного хвильового опору здійснюється методами синтезу коливальних систем [3, 4], які включають:

- Спектральний підхід: використовується для аналізу та синтезу, де за заданими власними числами (спектрами) відновлюються закони зміни розподілених параметрів [5, 6].
- Метод ряду Фур'є: застосовується для проєктування нерегулярних резонаторів, дозволяючи апроксимувати необхідний профіль неоднорідності [7, 8].
- Метод синтезу з використанням ступеневих шлейфів: розвиток методів на основі неоднорідних ліній, що дозволяє формувати широкі смуги узгодження або загородження [9, 10].
- Моделювання на основі еквівалентних схем: використання радіальних резонаторів або комбінованих структур, де нерегулярні лінії замінюються еквівалентними неоднорідними ланками для розрахунку генераторів [11, 12].
- Синтез на основі плавно-неоднорідних ліній: застосовується для створення смуговозагороджувальних фільтрів, забезпечуючи точний розрахунок коефіцієнтів затухання [13, 14].

При проєктуванні часто використовується принцип розбиття нерегулярної лінії на ряд малих ділянок (сходинок), кожна з яких вважається регулярною [15]. Усі перелічені вище методи тією чи іншою мірою використовують поняття спектра неоднорідної лінії (резонансних частот), від якого залежать характеристики пристроїв, що використовують лінії передачі. Тому існує зв'язок між вимогами до електричних параметрів ліній передачі та спектром. Звідси випливає, що вимогам до електричних характеристик лінії відповідає певний спектр резонансних частот. Тому, якщо необхідні електричні характеристики не задовольняють умовам фізичної реалізовуваності, то таку лінію в принципі неможливо реалізувати, тобто спектра резонансних частот лінії передачі не існує.

На даний час завдання визначення хвильового опору за спектром лінії в основному вирішене для ліній, процеси в яких описуються рівняннями Штурма–Ліувілля [5–8]. Цими рівняннями можна користуватися тільки в тих випадках, коли хвильовий опір має другу і більше неперервну похідну. Дані умови гарантують неперервність потенціалу рівняння Штурма–Ліувілля і дозволяють використовувати результати оберненої задачі теорії розсіювання для синтезу неоднорідних ліній при класичних ліувіллівських граничних умовах на обох кінцях лінії. Наприклад, якщо хвильовий опір має стрибки (розриви першого роду), то відомими результатами безпосередньо користуватися не можна. Крім того, при відновленні граничних умов може виявитися так, що вони не задовольняють умовам фізичної реалізовуваності, хоча і є ліувіллівськими. Наприклад, може з’ясуватися, що лінія повинна бути навантажена на негативну ємність або індуктивність, що є фізично нереалізовуваним. Тому при використанні спектрального підходу під час синтезу ліній на спектр лінії, крім класичних ліувіллівських граничних умов, необхідно накласти додаткові умови щодо фізичної реалізовуваності спектра.

Метою даної статті є визначення обмежень на розподіл спектра частот фізично реалізовуваних неоднорідних довгих ліній з різними навантаженнями. Для вирішення цього завдання використовується теорія ланцюгових дробів та східчастих схем.

Виклад основного матеріалу дослідження

1. Обмеження, що накладаються на реактивний опір кіл зі скінченним часом затримки

Щоб реактивний вхідний опір

$$z=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k p}{p^2+\omega_k^2},\ p=j\omega,\ j=\sqrt{-1},\beta_k>0, \quad (1)$$

де ω – реалізовувався у вигляді відрізка лінії зі скінченним часом затримки $0<t_з<\infty$ та зосередженим реактивним навантаженням, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова:

$$0<\lim_{k\to\infty} k/\omega_k<\infty. \quad (2)$$

Доведення**.** Відомо [1], що опір (1) завжди реалізовуваний у вигляді нескінченного східчастого кола. Тому потрібно лише показати, що час затримки цього кола є скінченним і не дорівнює нулю. Розглянемо замкнене стрижневе коло Річардса, що складається з n одиничних елементів, де n – парне число, і поставимо вимогу, щоб перші полюси вхідного опору дорівнювали ω_k. Тоді вхідний опір кола Річардса:

$$z_n(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k\lambda}{\lambda^2+\xi_k^2},\ \alpha_k>0,\lambda=thp\frac{t_з}{n},\ \xi_k=tg\omega_k\frac{t_з}{n},\ t_з<\frac{n\pi}{2\omega_{n/2}}.$$
$$tg\omega\frac{t_з}{n}=\xi_k,\ k=1,2,...,n/2, \quad (3)$$

З (3) випливає, що $\xi_k>\xi_{k-1}$. З урахуванням сказаного, знайдемо вираз для α_k при якому

$$res\, z=res\, z_n(\lambda),\ p=j\omega_k,\ k\le n/2. \quad (4)$$

Для цього позначимо:

$$z_n(\lambda)=\frac{A_n(\lambda)}{B_n(\lambda)}. \quad (5)$$

Тоді

$$\alpha_k=2\frac{A_n(\lambda_k)}{\frac{dB_n(\lambda)}{d\lambda}},\ \lambda=\lambda_k,\ \lambda_k=j\xi_k. \quad (6)$$

Враховуючи, що:

$$\frac{d\lambda}{dp}=\frac{t_з}{n}\frac{1}{ch^2p\frac{t_з}{n}},\ \frac{dB_n}{dp}=\frac{dB_n}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dp}, \quad (7)$$

визначаємо

$$\frac{dB_n}{d\lambda}=\frac{n}{t_з}ch^2p\frac{t_з}{n}\frac{dB_n}{dp}. \quad (8)$$

Отже

$$\alpha_k=\frac{t_з}{n}\frac{1}{ch^2p_k\frac{t_з}{n}}\beta_k, \quad (9)$$

де

$$\beta_k=2\frac{A_n}{\frac{dB_n}{dp}}=2res\, z_n(\lambda),\ p=j\omega_k. \quad (10)$$

Враховуючи, що розглянуті полюси $z_n(\lambda)$ в p-площині задовольняють рівнянню

$$tg\omega\frac{t_з}{n}=\xi_k,\ k=1,2,...,n/2, \quad (11)$$

знаходимо час затримки

$$t_з = \frac{n}{\omega_{n/2}} arctg\xi_{n/2} \ \ (n \to \infty). \qquad (12)$$

Перейдемо в виразах (3), (12) до границі при $n \to \infty$. В результаті формула (3) перейде в (1). При цьому час затримки

$$t_з = \lim_{n\to\infty} arctg\xi_{n/2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\omega_{n/2}}. \qquad (13)$$

Оскільки

$$0 < \lim_{n\to\infty} arctg\xi_{n/2} \le \frac{\pi}{2}, \qquad (14)$$

то

$$0 < t_з \le \pi \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\omega_k}. \qquad (15)$$

Тобто опір (1) відповідає колу, що має скінченний час затримки. Слід зазначити, що умовами (14), (15) можна користуватися, коли існують границі у формулах (2), (14), (15). Зокрема, при розгляді довгих ліній із неперервною другою похідною хвильового опору, процеси описуються рівняннями Штурма–Ліувілля [8]. У цьому випадку границі (2), (14), (15) існують [9]. Якщо хвильовий опір лінії має розриви першого роду, то границі в зазначених формулах можуть не існувати. Тоді границі слід замінити на верхню межу.

2. Обмеження, що накладаються на спектр $\omega_k, k = 1,2,... \{\omega_k\}$ неоднорідної лінії з реактивним навантаженням

Тепер знайдемо обмеження на спектр $\{\omega_k\}$ лінії, навантаженої на зосереджене довільне реактивне навантаження. Для цього розглянемо реактивну функцію

$$z_n = \frac{\alpha_0}{p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k p}{p^2 + \omega_k^2}, \qquad (16)$$

яку розкладемо в ланцюговий дріб

$$z_n = \cfrac{1}{j\omega C_1 + \cfrac{1}{j\omega L_2 + \cfrac{1}{j\omega C_3 + \cdots + \cfrac{1}{j\omega L_{2n} + \cfrac{1}{j\omega C_{2n+1}}}}}}. \qquad (17)$$

Опір (17) відповідає східчастому LC-колу $C_1, L_2, C_3, ..., L_{2n}, C_{2n+1}$.

Отже, щоб знайти умови, яким повинні задовольняти резонансні частоти лінії, навантаженої на східчасте LC-коло з m елементів $C_{н1}, L_{н2}, C_{н3},...$ (усього коло навантаження містить m елементів), треба m елементів $C_{2n+1}, L_{2n}, C_{2n-1},...$ виразити через числа ω_k та перейти до границі при $n \to \infty$. При цьому слід вимагати:

$$\begin{gathered} 0 < \lim_{n\to\infty} C_{2n+1} = C_{н1} < \infty, \\ 0 < \lim_{n\to\infty} L_{2n} = L_{н2} < \infty, ... \end{gathered} \qquad (18)$$

і щоб (m+1) елемент перетворився в нуль.

Із закону утворення підхідних дробів [2] випливає, що для підхідного дробу

$$\frac{A_k}{B_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + ... + \cfrac{1}{a_k}} \qquad (19)$$

випливає рівність

$$j\omega Q_{2n+1} P_{2n+1-(m+1)} - P_{2n+1} j\omega Q_{2n+1-(m+1)} = (-1)^{2n+1-m} C_{2n+1} L_{2n} \cdots C_{2n-m+2} (j\omega)^m + (j\omega)^{m-2} a + \cdots, \qquad (20)$$
a – деяке число,

де $\varphi(a_i)$ – деяка функція елементів ланцюгового дробу є лінійною комбінацією добутків вигляду $a_{n1} a_{n2} ... a_{n\chi}$. Причому $\max\chi = m - 3$. Позначимо підхідні дроби ланцюгового дробу (17) через $P_k / j\omega Q_k$. Тоді

$$\begin{gathered} j\omega Q_{2n} = (j\omega)^{2n} C_1 L_2 C_3 \cdots C_{2n+1} L_{2n} + (j\omega)^{2n-2} a + \cdots + 1, \\ j\omega Q_{2n+1} = j\omega\left[(j\omega)^{2n} C_1 L_2 C_3 \cdots C_{2n+1} + (j\omega)^{2n-2} a_1 + \cdots + \sum_{k=0}^{n} C_{2k+1}\right], \end{gathered} \qquad (21)$$

де a, a_1 – деякі дійсні числа.

Розглянемо відношення:

$$\frac{Q_{2n-m}}{Q_{2n+1}}=\frac{(j\omega)^{2n-(m+1)}C_1L_2C_3\cdots L_{2n-m-1}C_{2n-m}+\cdots}{(j\omega)^{2n}C_1L_2C_3\cdots L_{2n}C_{2n+1}+\cdots}, \quad (22)$$

де m – непарне число, $m<2n$. З урахуванням (22) розкладемо функцію $(j\omega)^{m-1}Q_{2n-m}/Q_{2n+1}$ в суму найпростіших дробів. У результаті отримаємо:

$$(j\omega)^{m-1}\frac{Q_{2n-m}}{Q_{2n+1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_k^2}}. \quad (23)$$

Коефіцієнти β_k знаходимо з виразу (23):

$$\beta_k=\lim_{\omega\to\omega_k}\frac{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_k^2}\right)(j\omega)^{m-1}Q_{2n-m}}{Q_{2n+1}}= =\frac{-\dfrac{2}{\omega_k}(j\omega)^{m-1}Q_{2n-m}(\omega_k)}{Q'_{2n+1}(\omega_k)}. \quad (24)$$

Помноживши (23) на $(j\omega)^2$ і спрямувавши $\omega\to\infty$, отримаємо:

$$\frac{1}{L_{2n-m+1}C_{2n-m+2}\cdots L_{2n}C_{2n+1}}= =\sum_{k=1}^{n}\frac{-2\omega_k(j\omega_k)^{m-1}Q_{2n-m}(\omega_k)}{Q'_{2n+1}(\omega_k)}. \quad (25)$$

Згідно виразу (20), маємо

$$j\omega Q_{2n+1}P_{2n+1-(m+1)}-P_{2n+1}j\omega Q_{2n+1-(m+1)}= =(-1)^{2n+1-m}C_{2n+1}L_{2n}\cdots C_{2n-m+2}(j\omega)^m+ +(j\omega)^{m-2}a+\cdots. \quad (26)$$

Звідси знаходимо

$$Q_{2n+1-(m+1)}(\omega_k)= \frac{-(j\omega_k)^mC_{2n+1}L_{2n}\cdots C_{2n-m+2}+(j\omega_k)^{m-2}a+\cdots}{-j\omega_kP_{2n+1}(\omega_k)}. \quad (27)$$

Виразимо $P_k(\omega_l)$ через $Q_k(\omega_l)$. Для цього помножимо вираз (16) на $\left(\omega_l^2-\omega^2\right)/j\omega$ і спрямуємо частоту ω до ω_l. В результаті отримаємо вираз для коефіцієнтів α_l в формулі (16)

$$\alpha_l=\lim_{\omega\to\omega_l}\frac{P_k(\omega)\left(\omega_l^2-\omega^2\right)}{-\omega^2Q_k(\omega)}=\frac{2P_k(\omega_l)}{\omega_lQ'_k(\omega_l)}. \quad (28)$$

Щоб перейти до реактивного навантаження лінії, у виразі (25) перейдемо до границі при $\omega\to\infty$. В результаті отримаємо:

$$\frac{1}{L_{нm+1}C_{2n-m+2}\cdots L_{н2}C_{н1}}= 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_1(j\omega_k)^{2(m-1)}+a(j\omega_k)^{2(m-2)}+\cdots}{\alpha_k\left[Q'(\omega_k)\right]^2}, \quad (29)$$

$$Q=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_k^2}\right),\ a, a_1 - \text{деякі числа.}$$

З аналізу формули (29) випливає: щоб реалізувати резонатор на основі лінії передачі з набором резонансних частот $0<\omega_1<\omega_2<\cdots$ необхідно і достатньо виконати умову (2) та ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_k^{2(m-1)}}{\left[M'(\omega_k)\right]^2} \quad (30)$$

має збігатися, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_k^{2m}}{\left[M'(\omega_k)\right]^2} \quad (31)$$

Має розбігатися, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_k^{2(m-1)}}{\left[M'(\omega_k)\right]^2}<\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_k^{2m}}{\left[M'(\omega_k)\right]^2}=\infty, \quad M=\omega Q=\omega\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_k^2}\right). \quad (32)$$

При цьому навантаженням резонатора є зосереджене коло, увімкнене в кінці резонатора (в кінці лінії передачі). Коло навантаження являє собою східчасту схему (ланцюг), що складається з m елементів. $C_{н1}, L_{н2}, C_{н3},\cdots$. При цьому останнім елементом, підключеним до лінії, є паралельна ємність $C_{н1}$. Далі послідовно підключається індуктивність $L_{н2}$. Далі підключається наступна паралельна ємність $C_{н3}$. Потім знову підключається наступна послідовна індуктивність $L_{н4}$ і так далі. Якщо виходити з навантаженої лінії, для якої нуль не є резонансною частотою, то у (32) слід функцію M замінити на Q. При цьому східчаста схема навантаження починатиметься з індуктивності $L_{н1}$ (останній елемент східчастої схеми навантаження $L_{н1}, C_{н2}, L_{н3},\cdots$).

З формул (32) випливають такі висновки:

1. Якщо з послідовності резонансних частот $0<\omega_1<\omega_2<\cdots$ вилучити ненульову частоту ω_η, то нова послідовність буде спектром лінії, навантаженої на східчасту схему *m*-2 елементів. Якщо виявиться, що $m-2\le 0$, то це означає, що нова утворена послідовність відповідає розімкненій лінії. Цей випадок відповідає ємнісному навантаженню або коли до лінії підключений послідовний контур.

Для доведення позначимо функцію $M(\omega)$ нової послідовності через $M_1(\omega)$.

Тоді

$$M_1(\omega)=\frac{M(\omega)}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_\eta^2}\right)},$$

$$M_1'(\omega_k)=\frac{M'(\omega_k)}{\left(1-\frac{\omega_k^{\,2}}{\omega_n^2}\right)}, \tag{33}$$

$k\neq n.$

Отже:

$$\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq\eta}}^{\infty}\frac{\omega_k^{2(m-3)}}{\left[M_1'(\omega_k)\right]^2}=$$

$$=\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq\eta}}^{\infty}\left[\begin{aligned}&\frac{1}{\omega_\eta^2}\frac{\omega_k^{2(m-1)}}{\left[M'(\omega_k)\right]^2}-\frac{2}{\omega_\eta^2}\frac{\omega_k^{2(m-2)}}{\left[M'(\omega_k)\right]^2}+\\&+\frac{\omega_k^{2(m-3)}}{\left[M'(\omega_k)\right]^2}\end{aligned}\right]. \tag{34}$$

З (32) випливає, що ряд (34) збігається, а ряд

$$\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq\eta}}^{\infty}\frac{\omega_k^{2(m-3)}}{\left[M_1'(\omega_k)\right]^2} \tag{35}$$

розбігається. Отже, коло навантаження складається з $m-2$ елементів.

2. При малих значеннях *m* формула (29) спрощується. Наприклад, при кількості елементів навантаження $m\le 4$ отримаємо

$$\begin{aligned}&\frac{1}{C_{н1}}=4\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\alpha_0^2}{\alpha_k\left[M'(\omega_k)\right]^2}+\alpha_0,\\&\frac{1}{L_{н2}C_{н1}}=4C_{н1}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\alpha_0^2\omega_k^2}{\alpha_k\left[M'(\omega_k)\right]^2},\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{C_{н3}L_{н2}C_{н1}}=4\alpha_0^2\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\omega_k^2C_{н1}L_{н2}-1}{\alpha_k\left[Q'(\omega_k)\right]^2},\\&\frac{1}{L_{н4}C_{н3}L_{н2}C_{н1}}=\\&=4\alpha_0^2\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{\omega_k^4C_{н1}L_{н2}C_{н3}-\omega_k^2\left(C_{н1}+C_{н3}\right)}{\alpha_k\left[Q'(\omega_k)\right]^2}.\end{aligned} \tag{37}$$

3. Якщо до спектра лінії $0<\omega_1<\omega_2<\cdots$ з навантаженням із *m*-елементів додати одне число $\Omega\neq\omega_k$, то нова послідовність буде спектром частот лінії, навантаженої на коло з *m*+2 елементами.

4. Якщо з набору частот $0<\omega_1<\omega_2<\cdots$ вилучити довільні *N* чисел і додати інші *N* чисел, відмінні від наявних, то знову утворена послідовність буде спектром частот лінії з навантаженням того же типу. Тільки значення елементів навантаження зміняться. При розгляді ліній, для яких нуль не є резонансною частотою (тобто не входить до спектра лінії), отримані висновки залишаються справедливими. Тільки у першому наслідку від розімкненої лінії слід перейти до замкненої, і від послідовного контуру та ємності – до паралельного контуру та індуктивності відповідно.

5. Якщо зі спектра $0<\omega_1<\omega_2<\cdots$ вилучити нуль, то послідовність $\omega_1<\omega_2<\cdots$ є спектром частот лінії, навантаженої на східчасте коло $L_{н1}, C_{н2},\cdots$, що складається з *m*=1 елементів. Справедливим є і зворотне твердження.

Якщо кількість елементів виходить від'ємним числом або дорівнює нулю, то це означає, що лінія розімкнена або замкнена. Із сказаного випливає: якщо числа $0<\omega_1<\omega_2<\cdots$ є спектром частот розімкненої лінії, то послідовність $\omega_1<\omega_2<\cdots$ є спектром частот замкненої лінії, але не навпаки. Наприклад, розглянемо спектр $\omega_0=0,\ \omega_k=$ $=(2k-1)\pi/\left(2t_з\right)$. Тобто спектр утворений резонансними частотами однорідної замкненої лінії з часом затримки t_3 і нулем. Щоб визначити тип навантаження з даним спектром, знаходимо:

$$\begin{aligned}&M(\omega)=\omega\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\omega^2 4t_з^2}{\left(2k-1\right)^2\pi^2}\right)=\omega\cos\omega t_з,\\&M'(\omega)=\cos\omega t_з-\omega t_з\sin\omega t_з.\end{aligned} \tag{38}$$

При $\omega=\omega_k$

$$\left[M'(\omega_k)\right]^2=\frac{\pi^2}{4}\left(2k-1\right)^2. \tag{39}$$

Далі визначаємо збіжність рядів (32) при $m = 1$:

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{1}{2},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_k^2}{\left[M^2(\omega_k)\right]^2}=\infty. \quad (40)$$

Таким чином числа ω_k утворюють спектр лінії з ємнісним навантаженням. Якщо до даної послідовності додати ще одне число $\Omega \neq \omega_k$, то новий числовий набір є спектром лінії, навантаженої на східчасте коло $C_{н1}, L_{н2}, C_{н3}$.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших досліджень

В результаті проведених досліджень встановлено обмеження на розподіл спектра резонансних частот розподілених кіл зі скінченним часом затримки. Показано, що дані обмеження мають асимптотичний характер і дозволяють у скінченній області частот отримати необхідний розподіл резонансних частот резонаторів на основі неоднорідних ліній передачі. Це дозволяє визначити характер зміни хвильового опору від поточної довжини та реалізувати резонансні системи різної конструкції: коаксіальні лінії різного перерізу, смужкові неоднорідні лінії зі змінною шириною струмонесучої смужки. Перспективи подальших досліджень пов'язані з розробкою конкретних методів синтезу перестроюваних і неперестроюваних резонаторів різного призначення.

Декларація про штучний інтелект

В роботі штучний інтелект не застосовувався. Дані, які використовувались, були взяті з загальних принципів та теорії радіотехнічних кіл, та попередніх робіт автора.

Конфлікт інтересів

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів та підтверджує, що під час підготовки цієї роботи не існувало жодних комерційних, фінансових чи інших взаємовідносин, які могли б бути розцінені як такі, що здатні вплинути на результати дослідження або їх інтерпретацію. Робота виконана відповідно до принципів академічної доброчесності, етичних норм проведення наукових досліджень та вимог редакційної політики щодо запобігання конфлікту інтересів.

ЛІТЕРАТУРА

[1] D. M. Pozar, Microwave Engineering. John Wiley & Sons. USA. 2024. 800 p.

[2] E. Robert, Foundations lor microwave engineering. The IEEE Press Series on Electromagnetic Wave Theory USA. 2022 p. 945 p.

[3] D. Polyakov, "On the spectral properties of a fourt-order self-adjoint operator", in *Diff. Equ.*, vol. 59, pp. 168–173, 2023.

[4] S. Buterin, "Uniform full stability of recovering convolutional perturbation of the Sturm-Liouville operator from the spectrum", in *J. Diff. Equ.,* vol. 282, pp. 67–103, 2021.

[5] V. Kravchenko, and S. Torba, "A practical method for recovering Sturm-Liouville problems from the Weyl function", in *Inverse Probl.*, vol. 37, 065011, 2021.

[6] L. Chen, G. Shi, and J. Yan, "On the Hochstadt-Lieberman theorem for the fourth-order binomial operator", in *J. Math.*, vol. 64, 043503, 2023. https://doi.org/10.1063/5.0107145

[7] S. Buterin, M. Malyugina, and C. Shieh, "An inverse spectral problem for second-order functional-differential pencils with two delays", in *Appl. Math. Comput.*, vol. 411, 126475 2021 https://doi.org/10.48550/arXiv.2010.14238 .

[8] V. Marchenko, "Sturm-liouville operators and applications". Revised Edition. 2011 by the American Mathematical Society. Printed in the United States of America. 390 p.

[9] N.Bondarenko, and E. Chitorkin, "Inverse Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary conditions", in *Mathematics*, vol. 11, 1138, 2023. https://doi.org/10.3390/math11102408

[10] N. Bondarenko, "Inverse Sturm-Liouville problem with analytical functions in the boundary condition", Mathematics. Mathematical Methods in the *Applied Sciences*, 2020. https://doi.org/10.1515/math-2020-0188Corpus ID:219982049

[11] N. Bondarenko, "Partial Inverse Sturm-Liouville Problems", in *Mathematics*, vol.11(10), 2408. 2023. https://doi.org/10.3390/math11102408

[12] M. Acil and A. Konuralp, "Reconstruction of potential function in inverse Sturm-Liouvill problem via partial data", in *International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications* ISSN: 2146-0957 eISSN: 2146-5703 Vol. 11, No. 2, pp. 186–198, 2021. http://doi.org/10.11121/ijocta.01.2021.01090

[13] S. Buterin and S. Vasilev, "An inverse Sturm-Liouville-type problem with constant delay and non-zero initial function" in *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. April 2023. https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.05487

[14] V. Kravchenko, "Reconstruction Techniques for Inverse Sturm–Liouville Problems With Complex Coefficients" in *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. Vol.48, Iss.17. P. 15875–15889, 2025. https://doi.org/10.1002/mma.70057

[15] M. Zhao, Q Jiangang and X. Chen, "A new approach to inverse Sturm-Liouville problems based on point interaction", in *Mathematics Spectral Theory*.

Козловський В. В.

РОЗПОДІЛ РЕЗОНАНСНИХ ЧАСТОТ НЕОДНОРІДНИХ ЛІНІЙ

У статті визначено умови, яким повинні задовольняти резонансні частоти (спектр) неоднорідних ліній, навантажених на реактивне зосереджене навантаження, що складається зі скінченної кількості зосереджених індуктивностей та ємностей. Для визначення умов фізичної реалізовуваності неоднорідних ліній використано теорію ланцюгових дробів. При цьому вхідний опір навантаженої неоднорідної лінії представлено у вигляді нескінченного східчастого кола, яке отримується в результаті граничного переходу скінченного ланцюгового дробу до нескінченного.

Для визначення часу затримки лінії та виконання умов фізичної реалізовуваності використано стрижневе коло Річардса (багатоступенева лінія, що складається з каскадного з'єднання однорідних відрізків ліній передачі, які мають різні хвильові опори та однаковий час затримки всіх ступенів). Для визначення значень зосереджених елементів навантаження лінії розроблено методологію, що дозволяє виразити елементи ланцюгового дробу через спектр частот навантаженої лінії. Суть використовуваної методології полягає в тому, що реактивне навантаження лінії можна представити у вигляді останнього елемента східчастого кола, яке складається з самої лінії та навантаження. Тому, щоб визначити елементи навантаження, спочатку будується східчасте коло і опори останніх елементів виражаються через спектр лінії. Для переходу до навантаженої довгої лінії здійснюється граничний перехід до нескінченного східчастого кола. Такий підхід дозволив отримати у вигляді рядів аналітичні вирази для визначення елементів зосередженого кола навантаження. Завдяки отриманим співвідношенням розглянуто питання побудови підхідних дробів розподілених кіл без втрат. Отримані результати дозволяють синтезувати резонансні системи з необхідним розподілом резонансних частот.

У статті велику увагу приділено вивченню питань деформації спектрів резонансних частот: отримано умови, за дотримання яких можна в обмеженій області частот додавати нові та виключати наявні резонансні частоти. При цьому вивчено питання зміни елементів навантаження: показано, що деформація спектра призводить не лише до зміни значень елементів ланцюгового дробу, а й до зміни кількості елементів навантаження.

Ключові слова: резонансні частоти, спектр, ланцюговий дріб, підхідні дроби, східчасте коло, неоднорідна лінія, стрижневе коло, коло Річардса.

Kozlovskiy V.

RESONANT FREQUENCY DISTRIBUTION OF NON-UNIFORM LINES

The article defines the conditions that must be satisfied by the resonant frequencies (spectrum) of non-uniform transmission lines loaded with a reactive lumped load consisting of a finite number of lumped inductances and capacitances. To determine the conditions for the physical realizability of non-uniform lines, the theory of continued fractions is applied. In this approach, the input impedance of the loaded non-uniform line is represented as an infinite ladder network, obtained through a limit transition from a finite continued fraction to an infinite one.

To determine the line delay time and fulfill the physical realizability conditions, a Richards' rod circuit is utilized (a multi-stage line consisting of a cascade connection of uniform transmission line segments with different characteristic impedances and equal delay times for all stages). A methodology has been developed to determine the values of the lumped load elements, allowing the elements of the continued fraction to be expressed through the frequency spectrum of the loaded line. The core of this methodology lies in the fact that the reactive load can be represented as the last element of a ladder network comprising both the line and the load. Consequently, to determine the load elements, a ladder network is first constructed, and the impedances of the final elements are expressed via the line spectrum. To transition to a loaded long line, a limit transition to an infinite ladder network is performed. This approach has yielded analytical expressions in the form of series for determining the elements of the lumped load circuit. Based on the obtained relations, the construction of convergents for lossless distributed circuits is considered. The results enable the synthesis of resonant systems with a required distribution of resonant frequencies.

Significant attention is paid to the deformation of resonant frequency spectra: conditions are established under which new resonant frequencies can be added or existing ones excluded within a limited frequency range. Furthermore, the variation of load elements is studied, demonstrating that spectrum deformation leads not only to changes in the values of the continued fraction elements but also to a change in the total number of load elements.

Keywords: resonant frequencies, spectrum, continued fraction, convergents, ladder network, non-uniform line, rod circuit, Richards' circuit.

Дата першого надходження: 14.04.2026 р.
Дата прийняття до друку: 18.05.2026 р.
Дата публікації: 28.05.2026 р.