

УДК 621.891 – 539.375.1

DOI: 10.18372/0370-2197.1(110).20933

Ю. О. МАЛІНОВСЬКИЙ<sup>1</sup>, Д. П. ВЛАСЕНКОВ<sup>1</sup>, С. Ю. ОЛІЙНИК<sup>2</sup>,  
С. О. СИТНИК<sup>1</sup>, С. С. ТЕРЬОШИНА<sup>1</sup>, С. Ю. ДАЦЕНКО<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Криворізький фаховий коледж Державного університету «Київський авіаційний інститут», Кривий Ріг, Україна

<sup>2</sup>Криворізький національний університет, Кривий Ріг, Україна

## ОЦІНКА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ВЗАЄМОДІЮЧИХ ПОВЕРХНЕВИХ ШАРІВ МЕТОДАМИ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ЗА УМОВ ТЕРТЯ ТА ЗНОШУВАННЯ

У процесі виконання досліджень в рамках теорії тертя і зношування однією з робочих гіпотез прийнято, що під впливом дотичних навантажень зовнішні шари взаємодіючих деталей змінюють свою плоску форму на хвилеподібну. Тобто плоскі перерізи зовнішнього шару спотворюються і втрачають свою поздовжню стійкість [1]. Тому дана задача стає анізотропною задачею теорії пружності з урахуванням властивостей зовнішнього контактного шару. Інакше задача має особливість в межах граничної (контактної) умови, тому її рішення в такій постановці ускладнюється. Однак у ряді розрахункових випадків можна припустити, що в момент взаємодії деталей по спотворених площинах деформовані мікронерівності на обох деталях отримали взаємне руйнування за рахунок деформації зрізу або зминання до таких значень висот мікронерівностей, при яких можна вважати зовнішні шари - шарами, що відновили свою первісну плоску форму (без урахування зношених мікропорцій матеріалу).

В результаті зрізання деформаційних мікронерівностей під штампом і перед штампом, зовнішні шари взаємодіючих деталей в результаті крихкого і пластичного зношування відновлюють свою первісну плоску (до деформації) форму. Тому, при оцінці напружено-деформованого стану взаємодіючих деталей можна вважати, що працюють два пружних півпростори під впливом системи вертикальних і дотичних зусиль. Таким чином, розглянута задача може бути зведена до плоскої задачі теорії пружності під впливом вагового вертикального навантаження  $P$  і дотичного навантаження  $fP$ , викликаного опором зрізу або зминання деформаційних (хвильових) мікронерівностей. Іншими словами, в даній задачі ми нехтуємо впливом деформаційних хвиль, що утворилися в результаті втрати поздовжньої стійкості, на напружено-деформаційний стан зовнішнього шару деталі. При цьому вплив деформаційних хвиль однієї деталі на навантажений напівпростір другої деталі замінюємо системою імпульсних (періодичних) сил.

**Ключові слова:** тертя, знос, пружність, крихкість, повзучість, модуль Юнга, приведений модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, анізотропний матеріал, поверхневий шар, дотичне імпульсне навантаження, плоска задача теорії пружності, плоский напружений стан, рівняння сумісності, функція напруження.

**Вступ.** Як було встановлено в [1] дана задача є задачею про те, що зовнішній шар матеріалу деталі в результаті тривалої приробітки стає ущільненим. Тому різні шари матеріалу набувають відмінні фізичні властивості. В цьому полягає суть цієї анізотропії. Іншими словами анізотропна задача теорії пружності (при розгляді процесів тертя та зношування) відрізняється від ізотропної задачі тільки відмінністю в фізичних властивостях поверхні деталі від своїх підповерхневих шарів. Як було показано в джерелі [1] при взаємному навантаженні деталей їх

поверхневі шари знаходяться в складному напруженому стані, де виявляються ефекти місцевого стиснення, зминання, крихкого і пружно-пластичного руйнування та втрати поздовжньої стійкості шарів.

**Метою роботи** є обґрунтування більш точної розрахункової моделі при визначенні нормальних та дотичних напружень в різних точках деталей в деякій околиці поверхневих та підповерхневих шарів при терті та зношуванні в рамках задачі про плоский напружений стан.

**Аналіз виконаних досліджень і публікацій.** При взаємодії плоских або циліндричних деталей вважається, що первинна форма деталей (плоска чи циліндрична), після відбування процесів тертя та зношування залишається незмінною [2]. Але в роботі [3] є посилання на більш раннє дослідження автора Л. Б. Ерліха, де робиться заява, що при взаємодії плоских та циліндричних деталей на їх первинну поверхню накладається хвилеподібна складова. Окрім того, як було встановлено з результатів експериментів [4] поверхневі шари деталей при цьому зміцнюються. Накладання на поверхневі шари деталей хвилеподібних складових свідчить про те що ці шари втрачають повздовжню стійкість. Водночас це свідчить про те що у поверхневих шарах деталей не виконується гіпотеза плоских перерізів. Вказані факти свідчать що у відносно тонких поверхневих шарах деталей має місце анізотропна пружність. Крім того, можна сказати, що анізотропні ефекти мають прояви тільки у крайових умовах (на контактній границі деталі). Ці крайові умови є величинами які потрібно визначити спираючись на деформації руйнування. Таким чином дана задача буде статично невизначеною.

Тому з метою спрощення задачі будемо вважати, що деформаційні мікронерівності, котрі утворюються як деформаційний поверхневий шар, на момент взаємодії деталей вже буде повністю зрізаний (або зім'ятий). При цьому зовнішня поверхня деталі стає плоскою без урахування знов утворених геометричних мікронерівностей. Тобто через дуже незначний проміжок часу  $\Delta t$  знову у поверхневих шарах буде мати місто гіпотеза плоских перерізів. Таким чином задача стає знову ізотропною, але з урахуванням навантаження анізотропної задачі. В даному випадку вертикальне навантаження залишається незмінним, а дотичне навантаження стає пульсуючим. Згідно зі статичною еквівалентністю задачі дотичне навантаження буде прикладатись до вершин деформаційних мікронерівностей (для нашої розрахункової схеми – прикладання буде умовним).

**Викладення основного матеріалу.** При взаємодії різноманітних пар розрахункову схему задачі можна уявити як два взаємодіючі елементи, рухомі точки яких переміщуються в одній або декількох (двох) паралельних площинах. Як було обґрунтовано в [1], дана задача є анізотропною задачею теорії пружності з ущільненим зовнішнім шаром. Поведінку зовнішнього шару деталі та зв'язок цього шару з підповерхневими шарами можна описати за аналогією з [5]. Представимо цей взаємозв'язок через зусилля зрізу виступаючих гофрів хвилеподібних мікронерівностей.

Зауважимо, що анізотропна задача теорії пружності відрізняється від ізотропної задачі тільки фізичними властивостями поверхневого шару деталі від властивостей підповерхневих шарів. Математично ця задача має особливість в граничних умовах.

Як впливає з [1], при взаємному навантаженні деталей їх поверхневі шари знаходяться в складному напруженому стані, де проявляються ефекти контактної

взаємодії. Врахування анізотропії зовнішнього шару є ускладнюючим фактором в плані опису особливостей фізичних властивостей шару і спотворення гіпотези плоских перерізів.

Ці особливості мають місце тільки в межах деформаційного моношару, висота якого за один прохід становить кілька мікрон, залежно від фізичних властивостей металу і діючих дотичних зусиль. Весь ефект взаємодії деталей в межах зовнішніх шарів буде уподібнений за масою зрізаному шару виступаючих напівхвиль над площиною недеформованого шару. Звернемося до задачі про взаємодію деформаційних мікронерівностей поверхневих шарів обох деталей. Вони будуть руйнуватися за аналогією з руйнуванням плоского зовнішнього шару деталі під дією пульсуючого навантаження, прикладеного до умовних виступів, рівних амплітудам деформаційних мікронерівностей.

Таким чином, задача взаємодії двох анізотропних півпросторів буде вирішуватися за аналогією із задачею взаємодії двох ізотропних півпросторів, тільки постійне дотичне навантаження буде замінено відповідним пульсуючим навантаженням.

При подальшому викладі фізична модель задачі буде зведена до плоскої задачі теорії пружності, схильної до впливу пульсуючих дотичних зусиль. Для подальшого формулювання задачі необхідно визначити дотичні зусилля виходячи з умови зрізання напівхвиль ділянки деталі, що насувається.

Виконуючи подальше формулювання задачі, виходимо з положення, що при взаємодії деталей на їх контактну поверхню накладаються деформаційні хвилі, тобто перерізи деталей, плоских до деформації, не залишаються плоскими після деформації. Таким чином, в даній задачі гіпотеза плоских перерізів не виконується. Однак гіпотеза плоских перерізів є основоположною при вирішенні більшості задач теорії пружності та опору матеріалів [6]. Тому інтерес застосування гіпотези плоских перерізів очевидний при посиланнях на рішення відомих задач [2].

Крім того, в рамках лінійної теорії пружності та опору матеріалів використовується закон Гука, який також передбачає використання цієї гіпотези.

Зауважимо, що механізм утворення деформаційних мікронерівностей, їх зрізання і утворення нових практично плоских (або правильної геометричної форми) поверхонь, зводиться до такої послідовності:

1. Впровадження рухомого ребра рухомої деталі в масив другої (часто нерухомої) деталі з утворенням деформаційної хвилі попереду від рухомого штампа (деталі).

2. Зустріч ребра рухомої деталі з деформаційним гребенем на нерухомій деталі і подальше його зрізання при пружному контакті (або зминання при пластичній взаємодії).

3. Після усунення деформаційних мікронерівностей утворюються практично плоскі поверхні, на яких в результаті зрізання або зминання деформаційних мікронерівностей залишаються новоутворені хаотичні геометричні мікронерівності зі значно меншими величинами мікронерівностей.

Таким чином, без урахування механізму утворення деформаційних мікронерівностей, їх деформації та руйнування з подальшим зносом, дотичних поверхонь залишаються практично плоскими.

Тому при оцінці напружено-деформаційного стану взаємодіючих деталей можна вважати, що працюють два пружних півпростори під впливом системи дотичних і вертикальних зусиль.

Відзначимо, що дотичні зусилля, що виникають при зрізанні деформаційних мікронерівностей, будуть пульсуючими.

У більшості розрахункових випадків взаємодіючі деталі можна представити у вигляді нетовстих пластинок, що контактують по робочих площинах. На контактуючих площинах прикладені нормальні і дотичні навантаження (можна, в подальшому показати, що дотичні навантаження є пульсуючими). Таке завдання про розподіл нормальних і дотичних напружень в деяких околицях точок поблизу поверхневих шарів можна розглядати з позицій плоскої задачі теорії пружності.

У ряді випадків, коли  $A \rightarrow 0$ , то фактично зусилля  $\tau_{xy}$  прикладається до зовнішньої площини (контакту) деталей (рис. 1).

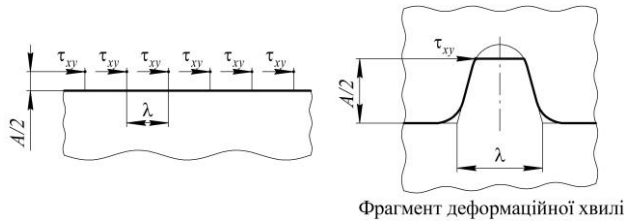


Рис. 1. Умовне прикладання зусиль до вершин деформаційних хвиль для ізотропної задачі.

Дотичні зусилля, що діють на гребнях деформаційних хвиль для анізотропної задачі, визначимо з умови зрізання цих гребнів як балок рівного опору при згині та зрізі. Плечем зрізання мікронерівності будемо вважати половину висоти гребеня на деформованій поверхні. Тоді зусилля зрізання групи мікронерівностей на  $n$  гребнях буде дорівнювати

$$T_{\text{ср}} = nb \frac{\lambda}{2} \tau_{xy}, \quad (1)$$

де  $\tau_{xy} = \tau_{\text{ср}}$  – зусилля зрізання мікронерівності приймаємо рівним напрузі зрізу;  $b$  – довжина одного гофру (ширина балки-смужки);  $\frac{\lambda}{2}$  – довжина одного мікрорізу (половина довжини хвилі деформації);  $n$  – число гребнів деформації поверхневого шару.

Така поведінка матеріалу має місце при крихкому стані зовнішнього шару, тобто після його поверхневого зміцнення. Матеріали, що не отримали поверхневого зміцнення, схильні поводитися в'язко-пружно, тому в даному випадку мікронерівності будуть зазнавати деформації зминання. Зусилля для зминання групи мікронерівностей на  $n$  гребнях буде дорівнювати

$$T'_{\text{ср}} = nb \frac{A}{2} \sigma_{\text{зм}}, \quad (2)$$

де  $\sigma_{\text{зм}}$  – напруга зминання матеріалу деталі (для матеріалу в стані поставки),  $A$  – амплітуда деформаційної хвилі.

Маючи співвідношення для деформуючих зусиль на майданчику контакту, запишемо деякі кінематичні співвідношення для деталей, що взаємодіють по майданчику контакту.

Укрупнено, напружено-деформований стан в деталях, що мають плоску (або близьку до плоскої) форму може бути описано за допомогою плоскої теорії пружності [6].

Попередньо запишемо вирази для зміни кількості руху та зміни кінетичної енергії деталі при зіткненні груп мікронерівностей деталей під час руху

$$m (V_1 - V_2) = T_{\text{ср}} \Delta t, \quad (3)$$

$$m(V_1^2 - V_2^2) = T_{\text{сеп}} \lambda, \quad (4)$$

де  $\lambda$  – довжина напівхвилі деформації поверхневого шару деталей;  $V_1, V_2$  – швидкості руху деталей до та після зіткнення груп мікронерівностей;  $\Delta t$  – час зіткнення однієї групи мікронерівностей.

Невідомі величини  $V_2, \Delta t$  визначаємо з (3), (4)

$$V_1 - V_2 = \frac{T_{\text{сеп}}}{m} \Delta t; \Delta t = \frac{m}{T_{\text{сеп}}} (V_1 - V_2), \quad (5)$$

з виразу (4) маємо

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 - \frac{T_{\text{сеп}} \lambda}{m}}. \quad (6)$$

Вирішивши (4) щодо  $V_2$  та підставивши його значення в (5) матимемо

$$\Delta t = \frac{m}{T_{\text{сеп}}} \left( V_1 - \sqrt{V_1^2 - \frac{T_{\text{сеп}} \lambda}{m}} \right). \quad (7)$$

Таким чином, кінематичні характеристики рухомої деталі визначаємо в момент зрізання мікронерівностей ( $\Delta t$ ). Це можуть бути величини  $\Delta t, V_2$ , імпульс сили  $T_{\text{сеп}} \Delta t$ , робота сили  $T_{\text{сеп}}$  на переміщенні  $\lambda$  ( $T_{\text{сеп}} \lambda = \bar{A}$ ).

Якщо деформаційні мікронерівності будуть зруйновані по пластичному варіанту (в результаті дії деформації зминання), то час руйнування групи мікронерівностей та швидкість деталі в момент руйнування мікронерівностей визначимо за формулами:

$$V_2' = \sqrt{V_1^2 - \frac{T'_{\text{зм}} \lambda}{m}}, \quad (8)$$

$$\Delta t' = \frac{m}{T'_{\text{зм}}} \left( V_1 - \sqrt{V_1^2 - \frac{T'_{\text{зм}} \lambda}{m}} \right). \quad (9)$$

Швидкість деталі в момент закінчення зрізання  $n$  груп мікронерівностей визначаємо з рівняння зміни кінетичної енергії руху деталі. Час зрізання мікронерівностей  $\Delta t$  визначаємо з рівняння кількості руху деталі.

Таким чином, кінематичні характеристики рухомої деталі визначимо в момент закінчення зрізу (чи зминання) мікронерівностей.

Якщо деформаційні мікронерівності будуть руйнуватися за пластичним варіантом взаємодії, при визначеному напружено-деформаційному стані в деякій околиці точок примежового шару, в формулах по визначенню часу руйнування мікронерівностей ( $\Delta t$ ) та швидкості закінчення руйнування цих мікронерівностей ( $V_2$ ) слід замість  $T_{\text{сеп}}$  використовувати значення зусилля  $T'_{\text{зм}}$ .

Навантаження, яке прикладається до поверхневих шарів деталі у вершинах виступаючих гребенів мікронерівностей, є пульсуючим, лінії дії цього дотичного навантаження розташовуються в горизонтальній площині на висоті  $\delta$  від геометрично навантаженої площини. Під  $\delta$  розуміємо найбільшу висоту мікронерівності, причому  $\delta \ll h$  (де  $h$  – товщина деталі). У такій постановці задача теорії пружності буде ізотропною (наприклад, при  $\delta \ll h$ ;  $\delta = 20 \text{ мкм} \ll h = 20 \text{ мм}$ ).

З огляду на періодичність зрізання груп мікронерівностей дотикове навантаження матиме пульсуючий вигляд, рис. 1, 2.

Дане навантаження буде приймати постійне значення в межах дуже короткого проміжку часу

$$\Delta t = \frac{\lambda}{V_1}, \text{ вважаючи } V = V_1 = \text{const}. \quad (10)$$

Враховуючи швидкоплинність процесу деформації та хвилеутворення на поверхневому шарі, можна знехтувати хвилеутворенням і прикласти дотичне навантаження до гребенів мікронерівностей, тоді постійне (або слабо змінюване) дотичне навантаження трансформується в короткочасне пульсуюче навантаження. Такий підхід дозволяє при складанні рівнянь рівноваги деталей зберегти гіпотезу плоских перерізів, а також скористатися рівняннями рівноваги для плоских і контактних задач теорії пружності, отже, у процесі зрізання деформаційних мікронерівностей під штампом і перед штампом навантажені шари взаємодіючих деталей відновлюють свою первісну плоску форму. Тому при оцінці напружено-деформованого стану взаємодіючих деталей можна наближено вважати, що працюють два пружних півпростору під впливом системи дотичних (пульсуючих) та нормальних зусиль.

Зусилля руйнування зовнішнього шару можна трактувати як зусилля зрізання хвилеподібних гребенів на зовнішній поверхні деталей. При цьому будемо припускати, що поверхневі і підповерхневі шари деталі є ізотропними і не утворюють поздовжніх тріщин між шарами. Інакше кажучи, підповерхневі шари деталі для більш глибоких шарів утворюють хвилі зі зменшуваними амплітудами.

Припустимо, що деформаційна хвиля розвивається в поверхневих і підповерхневих шарах при взаємодії деталей, на довжині  $l_2 = n\lambda$  (де  $n$  – число напівхвиль деформації поверхневого шару;  $\lambda$  – довжина однієї напівхвилі деформаційного шару;  $b$  – ширина балки-смужки (у поверхневому шарі)).

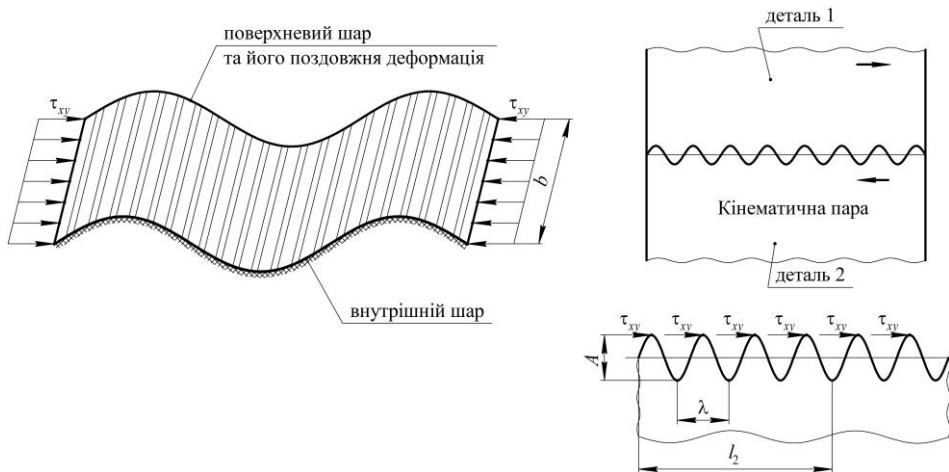


Рис. 2. Застосування дотичних зусиль до вершин деформаційних хвиль для анізотропної задачі.

У разі розгляду ізотропної задачі дотичне навантаження буде прикладено на відстані  $h = \frac{A}{2}$  від ізотропної площини.

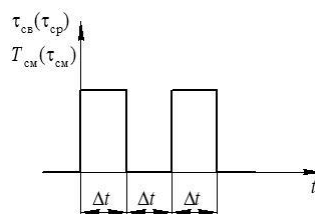


Рис. 3. Пульсуючий характер дотичного навантаження.

У більшості розглянутих випадків взаємодіючі деталі можна представити у вигляді нетовстих пластинок, що контактують по деяких поверхнях (наприклад: площинах, чи по циліндричних поверхнях, або комбінаціях цих поверхонь). При виконанні деяких умов на переміщення цих пластинок відносно їх країв або меж. Такі задачі відносяться до контактних задач теорії пружності, де дотичні і нормальні зусилля передаються від однієї деталі на другу деталь і навантажують пластинку по площині дотику деталей. Така одна пластинка з дотичним і нормальним навантаженням може бути описана за допомогою плоскої задачі теорії пружності. У такій постановці, при оцінці напружено-деформованих станів взаємодіючих деталей в околах точок зовнішнього шару, можна приблизно вважати, що працюють два пружні півпростори під впливом системи дотичних (пульсуючих) і нормальних зусиль.

Розглянемо один пружний напівпростір (плоску пластинку під впливом плоскої системи сил), рис. 4.

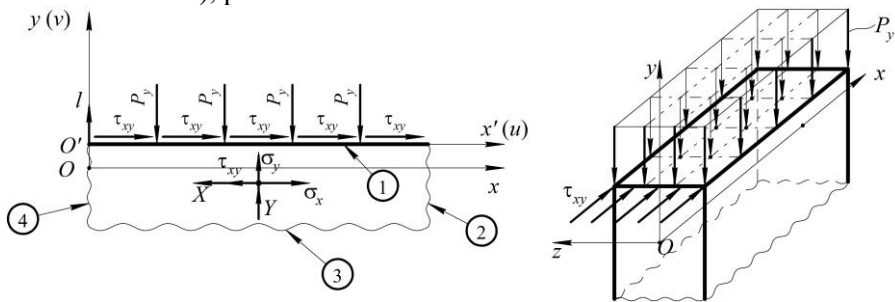


Рис. 4. Фрагмент деталі контактуючої пари  $l$  – направляючий вектор площини  $y = 0$ .

Тоді для плоскої задачі теорії пружності запишемо систему рівнянь рівноваги пластинки у формі [6]

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (11)$$

де  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  – компоненти тензора напружень;  $X$ ,  $Y$  – складові об'ємних сил, розподілених у деталі;  $l$ ,  $m$  – напрямні косинуси нормалей для меж задачі.

Запишемо граничні умови для ліній контуру задачі (в загальному вигляді). Для ліній контуру 2, 3, 4, рис. 4

$$\begin{aligned} \bar{X} &= l \sigma_x + m \tau_{xy} \\ \bar{Y} &= m \sigma_y + l \tau_{xy} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{для майданчика} \\ \text{контакту (пластинки)} \\ y=0 \end{array} \right\} \bar{X} = \tau_{xy}; \bar{Y} = -\sigma_y. \quad (12)$$

У окремому випадку рівноваги прямокутної пластини координатні осі приймаються паралельними сторонам пластинок. Так, наприклад, якщо напрямок осі приймається паралельним стороні пластини ( $Oy$ ), то  $l = 0$ ;  $m = 1$ , тоді граничні сили  $\bar{X} = \pm \tau_{xy}$ ;  $\bar{Y} = \pm \sigma_y$ .

Граничні умови на поверхнях контакту є невизначеними, як з точки зору механічних властивостей шару, так і з точки зору орієнтації майданчиків контакту відносно координатних осей при хвилеподібних деформаціях поверхневого шару. Якщо припустити, що механічні властивості шару відомі, то задача стає статично невизначеною через невідому орієнтацію майданчиків контакту і величину реактивних зусиль при взаємодії деталей.

Запишемо співвідношення між деформаціями і переміщеннями для двовимірних задач [6]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (13)$$

Тоді

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}, \quad (14)$$

де  $u(x, y)$  – позовжне переміщення вздовж осі  $Ox$ ;  $v(x, y)$  – позовжне переміщення вздовж осі  $Oy$ ;  $\varepsilon_x$  – позовжня деформація вздовж осі  $Ox$ ;  $\varepsilon_y$  – позовжня деформація вздовж осі  $Oy$ ;  $\gamma_{xy}$  – кутова деформація.

Деформації  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  та напруження  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  зв'язані узагальненим законом Гука для ізотропної задачі [6]

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x); \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}, \quad (15)$$

де  $E$ ,  $G$ ,  $\mu$  – відповідно модуль Юнга, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона.

Припустимо, що існує деяка гармонічна функція  $\varphi = \varphi(x, y)$ , яка допускає представлення [6]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \varepsilon_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right), \quad (16)$$

Тому як  $\varphi(x, y)$  – деяка гармонічна функція, то після підстановки (15), (16) у (14) отримуємо рівняння з частковими похідними у виді

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad (17)$$

Для вирішення плоскої задачі теорії пружності достатньо рішити рівняння рівноваги (11) сумісно з граничними умовами задачі (12), тобто розв'яжемо (17), відносно функції  $\varphi(x, y)$ . Цю функцію знайдемо виходячи з уявлення

$$\varphi(x, y) = f(y) \sin\left(\frac{k\pi x}{l_1}\right), \quad (18)$$

де  $f(y)$  – деяка функція від  $y$ , що підлягає визначенню.

Підставляючи (18) в рівняння (17), отримуємо

$$\alpha^4 f(y) + 2 \alpha f'(y) + f^{(IV)}(y) = 0, \quad (19)$$

де  $\alpha = \frac{k\pi}{l_1}$ ;  $k = 1, 2, 3, \dots$ ;  $l_1$  – довжина майданчика контакту.

Рішення (19) згідно [6] має вигляд

$$f(y) = C_1 \operatorname{ch}(\alpha y) + C_2 \operatorname{sh}(\alpha y) + C_3 y \operatorname{ch}(\alpha y) + C_4 y \operatorname{sh}(\alpha y), \quad (20)$$

Тоді, враховуючи (16), (17), (20), отримуємо

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = - \alpha \cos(\alpha x) [C_1 \alpha \operatorname{sh}(\alpha y) + C_2 \alpha \operatorname{ch}(\alpha y) + C_3 (\operatorname{ch}(\alpha y) + \alpha y \operatorname{sh}(\alpha y)) + C_4 (\operatorname{sh}(\alpha y) + \alpha y \operatorname{ch}(\alpha y))], \quad (21)$$

$$\sigma_x = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sin(\alpha x) [C_1 \alpha^2 \operatorname{ch}(\alpha y) + C_2 \alpha^2 \operatorname{sh}(\alpha y) + C_3 \alpha (2 \operatorname{sh}(\alpha y) + \alpha y \operatorname{ch}(\alpha y)) + C_4 \alpha (2 \operatorname{ch}(\alpha y) + \alpha y \operatorname{sh}(\alpha y))], \quad (22)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \alpha^2 \sin(\alpha x) [C_1 \operatorname{ch}(\alpha y) + C_2 \operatorname{sh}(\alpha y) + C_3 y \operatorname{ch}(\alpha y) + C_4 y \operatorname{sh}(\alpha y)], \quad (23)$$

Постійні інтегрування для виразів (21), (22), (23) знаходимо з силових умов на поверхнях дотику деталей, а також умов на поверхнях, що не контактують.

Після визначення сталих  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  і підстановки їх значень в вирази (21), (22), (23) можна розрахувати напруження  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  для різних точок площини  $xOy$ , а також визначити еквівалентні напруження  $\sigma_{\text{екв}}$  за формулою Мізеса (Треска) для того щоб замість трьох напружень для плоско навантаженого стану оперувати  $\sigma_{\text{екв}}$  для лінійного стану [4].

Для поверхні дотику будемо шукати невідомі постійні з виразів (12), (21), (22), (23) при  $\sigma_x = \tau$  – дотичне напруження на площі роз’єму та  $\sigma_y = -P'$  – вертикальне напруження на площі роз’єму. З виразів (12) після підстановки значень  $\bar{X}$  та  $\bar{Y}$  отримаємо

$$\tau - P = C_1 2 a^2 \sin(\alpha x) \operatorname{ch}(\alpha y), \quad (24)$$

тоді

$$C_1 = \frac{\tau - P}{2 a^2 \sin(\alpha x) \operatorname{ch}(\alpha y)}, \quad (25)$$

при  $y = 0$

$$C_1 = \frac{\tau - P}{2 a^2 \sin(\alpha x)}. \quad (26)$$

Для кожної точки на осі  $Ox$   $C_1$  має своє значення (тому як  $0 < x \leq l_1$ ). При русі деталей вони знаходяться в стані динамічної рівноваги. Тому для визначення сталей  $C_2, C_3, C_4$  необхідно знайти вирази для рівноваги інших граней деталі 2, 3, 4 через сталі  $C_2, C_3, C_4$ , а також з врахуванням конструктивного виконання цих граней.

В остаточному вирази для визначення  $C_2, C_3, C_4$  будуть аналогічні виразам (12), (26).

Враховуючи позначення  $\alpha = \frac{k\pi}{l_1}$  отримаємо, що кожна стала для функції  $\varphi(x, y)$  є функцією двох змінних  $x, y$ , а також параметру  $k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Іншими словами функція напружень  $E\epsilon$  є поверхнею напружень під площиною (поверхнею) взаємодії деталей. Даний підхід до вирішення задачі через зріз чи зминання мікронерівностей залишається деформаційним, тому як деформації, в основному, виникають при спотворенні зовнішнього шару деталі.

Отже, деформаційний процес супроводжується як виникненням деформаційних мікронерівностей, так і їх руйнуванням. Разом з тим дана задача може бути представлена як фрикційна, при цьому фрикційне навантаження що руйнує може бути представлено як інтегральне, по всій площині (поверхні) дотику деталей.

Сумарне дотичне зусилля, яке отримано в роботі [7] свідчить про те, що при складанні математичної моделі задачі враховано вплив нелінійних геометричних та фізичних властивостей матеріалу поверхневого шару. В цьому випадку фізичні характеристики моделі повинні враховувати зміни фізичних параметрів в процесі приробітки деталей, такі як пружні, в’язко-пружні та пластичні властивості поверхневих шарів.

Якщо ж розрахунки виконуються для матеріалів, які пройшли тривалу приробітку та отримали додаткову пружність і міцність поверхневих шарів, то матеріал деталей стає схильним до тріщиноутворення та пружного руйнування.

На цій підставі сталі задачі повинні бути відкориговані з врахуванням зміни міцності зовнішніх шарів та збільшенню межі міцності (пружності) та витривалості. При такому підході нелінійні властивості металу будуть слабо виражені, це означає, що майданчик текучості матеріалу буде дуже короткий, і геометрична нелінійність задачі може не проявитися, тому як залежність напружень від деформацій матеріалу не матиме виражених криволінійних ділянок, тому як межа текучості матеріалу практично співпадає з межею міцності.

Таким чином, матеріал поверхневого шару не отримає остаточних деформацій, а одразу після досягнення точками деталі межі текучості (міцності) матеріал поверхневого шару буде підданий локальному руйнуванню.

Тому в математичній моделі задачі окрім уявлення міцнісних характеристик поверхневого шару необхідно врахувати приріст поздовжньої сили  $\Delta T$  як величину, що залежить від поздовжнього переміщення (зсуву зовнішнього шару або деформаційних мікронерівностей) при їх деформації в процесі зрізу або зминання. А також жорсткості поздовжнього зв'язку між поверхневими та підповерхневими шарами. Відмітимо, що навіть при малих поздовжніх зсувах  $\eta(x, t)$  жорсткість поздовжнього зв'язку між шарами (поверхневими та підповерхневими) може в процесі мікросхоплення шарів (однієї деталі) значно зрости.

Звернемося до схеми навантаження деформаційних мікронерівностей при взаємодії деталей.

Наближено уявімо сукупність деформаційних мікронерівностей у вигляді поздовжніх повторюваних виступів на зовнішньому шарі (хвилеподібних виступів). Деформаційні виступи або гофри виникли на зовнішньому шарі в результаті зміни фізичних властивостей металу та втрати шаром поздовжньої стійкості, що характеризується спотворенням гіпотези плоских перерізів. Зовнішній шар металу деталі внаслідок використання спрощуючих припущень, свідчить про те, що навантаження в анізотропному поверхневому шарі зводиться до задачі про навантаження та руйнування окремо взятої мікронерівності зусиллями ( $\Delta P$ ,  $\tau$  – мікрозусилля) – вертикальним та дотичним.

Зауважимо, що приріст граничної сили  $\Delta T$ , як величини, що залежить від поздовжнього переміщення  $\eta(x, t)$  і жорсткості поздовжнього зв'язку між шарами (поверхневими і підповерхневими шарами).

Відзначимо, що навіть при малих поздовжніх зміщеннях  $\eta(x, t)$  жорсткість поздовжньої пружності зв'язку між шарами (поверхневими і підповерхневими) в процесі мікрозчеплення (в межах деталі) може істотно зрости. При підвищенні міцнісних властивостей поверхневих шарів деформації їх при поздовжньому вигині на гребенях хвиль можуть не відбутися, внаслідок близьких значень  $\sigma_T$ ,  $\sigma_B$  ( $\sigma_T \approx \sigma_B$ ), а відразу настане локальне крихке руйнування.

Поведінка поверхневого шару металу після деформації поздовжнього вигину залежить від багатьох факторів, таких як характеристики діаграми розтягування  $\sigma_T(\epsilon)$ ,  $\sigma_B(\epsilon)$ , модуля пружності  $E$ , межі витривалості  $\sigma_{-1}$ , твердості шару  $HB$  ( $HRC$ ), кількості циклів навантаження ( $n$ ), товщини поверхневого шару  $\delta$ , міцності поздовжнього зв'язку між поверхневим і підповерхневим шарами  $C$ . Дані характеристики зовнішніх шарів металу після їх обтиску протидіючою деталлю дозволять більш точно обчислювати додаткову дотичну силу, в результаті зближення кінців поверхневого шару деталі [7].

При цьому вид приросту функції  $\Delta T$ , за аналогією з джерелом [1, 7], може бути скоригований шляхом уточнення виникнення тріщинуватості та крихкого руйнування гребенів деформаційних мікронерівностей.

Спираючись на дані [1] запишемо вирази сили  $T^*$  як для фрикційної моделі

$$T^* = T + \Delta T = \frac{P}{b l_1} \left[ f_0 - \xi_{max} v_0 a \cos(p_0 t) + \xi_{max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(p_0 t) \right] + \frac{C k^2 \pi^2}{4 l_2} A_k^2(t), \quad (27)$$

де  $T$  – постійна складова сили тертя [7];  $\Delta T$  – приріст сили тертя, який визваний нелінійними явищами в поверхневих шарах при зближенні кінців (шару) [9];  $P$  – вертикальне навантаження на деталь фрикційної пари;  $b$ ,  $l_1$  –

розміри майданчику контакту в плані;  $f_0$  – постійне значення коефіцієнта тертя (коефіцієнт тертя спокою);  $\xi_{max}$  – найбільший зсув майданчику контакту при коливаннях;  $v_0$  – номінальна швидкість руху деталі (рухомого елемента);  $a$ ,  $\bar{b}$  – коефіцієнти характеристики тертя [8];  $p_0$  – частота автоколивань балки-смужки;  $C$  – розподілена поздовжня жорсткість поверхневого шару деталі з підповерхневим шаром;  $k = 1, 2, 3, \dots$ ;  $l_2$  – довжина деформованої ділянки поверхневого шару, рис. 2;  $A_k$  – амплітуда деформованої хвилі для гармоніки з індексом  $k$ .

Причому ці зусилля, які прикладено до визначених мікронерівностей з плином дуже короткого часу  $\Delta t$  можна вважати статичними (або квазістатичними, з врахуванням коефіцієнта динамічності).

Пружний масив, що залишився, після умовного зминання поверхневого шару підвержений дії дотичної сили  $\bar{T}$ , яка є пульсуючою (періодичною)  $\bar{T}(t) = \bar{T}(t, +\Delta\theta)$  (де  $\Delta\theta$  – деяка постійна частина періоду) та вертикальною силою  $P$ , яка найчастіше є постійною. Зусилля  $\bar{T}(t)$  можна представити як:

$$\bar{T}(t) = T \delta(t), \quad (28)$$

де  $T$  – постійне (усереднене) значення сили;  $\delta(t)$  – одинична дельта-функція Дірака.

Кожна деформаційна мікронерівність, через прийняті припущення, підлягає впливу мікросил  $\Delta P$ ,  $\tau$  які діють в точках  $C$ ,  $D$  (див. рис. 5), дають згинальний момент.

$$\mu_B(t) = \tau \frac{A_k}{2} - \Delta P \frac{\lambda}{2} > 0, \quad (29)$$

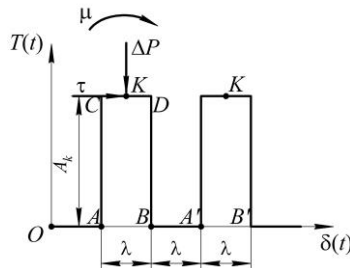


Рис. 5. Умовна схема деформації навантаження мікронерівності.

Якщо виконується нерівність (29), то розкриття мікронерівностей під дією сил  $\tau$ ,  $\Delta P$  відбудеться з утворенням мікротріщин (точки  $AA'$ ). При цьому зусилля, які діють в точках  $C$ ,  $D$  (див. рис. 5), дають згинальний момент  $\mu_B$ , який визначається за формулою (з урахуванням ексцентриситету прикладених зусиль  $\Delta P$ )

$$\mu_B(t) = \Delta P \left( f \frac{A_k}{2} - \left( \frac{\lambda}{2} - \Delta\lambda \right) \right) > 0, \quad (30)$$

У виразах (29), (30)  $\Delta P$  – вертикальна мікросила, прикладена до мікронерівності, з боку мікронерівності на протилежній деталі;  $f$  – коефіцієнт тертя між деталями приймається постійним значенням;  $A_k$  – стріла прогину балки (висота мікронерівностей);  $\lambda$  – довжина напівхвилі деформаційної мікронерівності;  $\Delta\lambda$  – приріст довжини напівхвилі за рахунок поздовжніх деформацій.

На основі схеми навантаження мікронерівностей (рис. 5), за умови, що плече сили  $\Delta P$  буде мінімальним, це означає, що навантаження мікронерівностей впливають переважно на мікросили  $\tau$ .

Причому вплив сила  $\tau$  матиме, як і в описі анізотропній так і ізотропній задачі. Для анізотропної задачі сила  $\tau$  прикладена до верхнього краю мікронерівності (рис. 5) точки  $C, D$ , при цьому в точках  $B (A)$  буде прикладена сила  $\tau$  та сила  $-\tau$ . Сила  $\tau$  (точка  $B$ ) викликає зріз мікронерівності уздовж ділянки  $AB$ , тобто це схема ізотропної задачі.

Після зрізання деформаційної мікронерівності, на зовнішній поверхні деталі залишається слід (сліди з геометричними мікронерівностями, такими як при грубому точінні ( $R_z = 40 \div 80$  мкм)), зрізані при цьому мікронерівності визначають знос. Такий знос більш-менш рівномірний. Якщо в процесі тертя буде діяти сила  $\Delta P$ , то геометричні мікронерівності будуть приглушені притискним зусиллям, як при деформації зрізу з боковим зміщенням. При цьому ступінь шорсткості поверхні стає ближче до її нижньої межі ( $R_z \approx 40$  мкм).

Якщо зосередитися на анізотропній задачі, то окрім зрізаючого зусилля в точці  $B$  також буде діяти згинальний момент  $\tau \frac{A_k}{2}$ , у цьому випадку в точці  $A$  (рис. 5) з'являється провідна мікротріщина, яка розкриється вздовж усього перетину  $AB$  (за один або кілька проходів, при цьому сила  $\tau$  також входить у площину зсуву). У цьому випадку при анізотропній задачі до роботи включиться також ще згинальний момент, який розширить зону тріщиноутворень і подальше сколювання більшості деформаційних мікронерівностей. Тобто врахування, крім сили зрізу  $\tau$  ще згинального моменту  $\tau \frac{A_k}{2}$ , також призводить до більш інтенсивного тріщиноутворення та відокремлення продуктів зношування (проявляється зв'язок тріщиноутворення мікронерівностей з їх зношуванням).

У випадку, коли на взаємодіючих деталях розташовуються не деформаційні а геометричні мікронерівностями, тоді характер взаємодії мікронерівностей зберігається, а інтенсивність зношування буде меншою.

Розглянув процес взаємодії двох мікронерівностей на контактуючих деталях пари нехтуємо впливом вертикального навантаження (29).

Хоча вертикальне навантаження, прикладене ексцентрично до верхньої частини мікронерівності ближче до точки  $B$ , створює відновлювальний момент, все одно згинальний момент, прикладений до мікронерівності, прагне розкрити зв'язок з'єднання площини з мікронерівностями по лінії  $AB$ . Зауважимо, що формулу (29), записану за допомогою мікропараметрів для одиничного контакту взаємодіючих мікронерівностей, можна виразити через раніше отриману залежність поверхневого шару з урахуванням фрикційного контакту двох балок-смужок взаємодіючих деталей [7]. Крім того, в роботі [1] визначені деформаційні характеристики взаємодіючих шарів деталей. В цьому випадку відновлювальний момент від сили  $\Delta P$  може бути реалізований частково, внаслідок прояву попереднього згину вертикальної осі деформаційної мікронерівності. З цієї метою додатково вносимо поправочний коефіцієнт ( $\epsilon \approx 0,3 \div 0,8$ ). Його величина може бути уточнена експериментально. Для цього у нерівність (30) введено вираз, що визначає амплітуду деформаційних мікронерівностей та довжину напівхвилі деформаційних мікронерівностей.

Тоді необхідно ввести, згідно з [7] рівняння, яке визначає елементарний згинальний момент, прикладений до деформаційної мікронерівності

$$\begin{aligned} \mu_B &= (\tau + \Delta\tau)A_k = \\ &= \Delta P \left[ f_0 - \xi_{max} v_0 a \cos(p_0 t) + \xi_{max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(p_0 t) \right] A_k + \frac{C_k k^2 \pi^2}{4 l_2} A_k^2, \end{aligned} \quad (31)$$

де  $\tau$  – елементарна дотична сила, прикладена до мікронерівності (рис. 5);  $\Delta\tau$  – приріст до дотичної сили;  $\Delta P$  – приріст нормальної сили, прикладеної до мікронерівності;  $A_k$  – амплітуда коливань деформаційної мікронерівності (при поздовжньому згині);  $f_0$  – постійна складова коефіцієнта тертя;  $\xi_{max}$  – максимальна складова поздовжнього зміщення поверхневого шару, перш ніж він втратить свою поздовжню стабільність;  $v_0$  – лінійна швидкість точки поверхневого шару деталі при її переміщенні;  $p_0$  – власна частота поздовжніх коливань поверхневого шару при автоколиваннях;  $a$ ,  $\bar{b}$  – коефіцієнти характеристики тертя [8];  $C_k$  – компонента складової поздовжнього зв'язку між поверхневими і підповерхневими шарами деталі;  $l_2$  – довжина поверхневого шару деталі, що піддається поздовжньому згину.

Далі будемо виходити з того, що поверхневий шар кожної з взаємодіючих деталей піддається поздовжньому вигину. Відповідно [7] поперечний вигин шару визначається за формулою

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^n z_k(t) \sin\left(\frac{k \pi x}{l_2}\right), \quad (32)$$

де  $z_k(t) = A_k(t) \sin(\psi_c)$  – змінна складова за часом поперечного прогину;  $A_k(t) = B_k \left[ 1 - \frac{v_k}{4} \varphi_k^*(t) \right]$  – амплітуда коливань поверхневого шару деталі;  $B_k$  – деяка постійна, визначимо її з початкових умов;  $v_k$  – постійна методу повільно змінних амплітуд (зазвичай вибирається з діапазону  $0 < v_k \leq 1$ );  $\varphi_k^*(t) = \beta_k^* \cos^3(p_0 t) - \alpha_k^* \cos(p_0 t)$  – періодична функція;  $\alpha_k^*$ ,  $\beta_k^*$  – постійні коефіцієнти [7];  $\psi_k(t) = (\omega_{0k}^* t + \Theta_k^*)$  – змінна часу;  $\Theta_k^*$  – початкова фаза для ( $k$ -ої) гармоніки;  $\omega_{0k}^*$  – власна частота поздовжніх коливань балки-смужки довжиною  $l_2$  для форми коливань з індексом  $k$ ;  $\lambda = \pi \sqrt[3]{\frac{4E_c I}{E}}$  – довжина деформаційної напівхвилі;  $E_c$  – модуль пружності зміцненого поверхневого шару деталі;  $I$  – момент інерції поверхневого шару деталі;  $E$  – модуль пружності внутрішніх шарів деталі.

З урахуванням наведеного (32) перепишемо у вигляді

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^n A_k(t) \sin(\psi_k(t)) \sin\left(\frac{k \pi x}{l_2}\right). \quad (33)$$

Тоді досягається максимум (31) при  $t=0$ ;  $\Theta_k^* = \frac{\pi}{2}$ ;  $k=1$   $x = \frac{l_2}{2}$ . Тоді орієнтуючись на першу форму для виразу  $v(x, t)$  отримаємо  $\max v\left(\frac{l_2}{2}; 0\right)$  (можливі варіанти  $k=1, 3, 5, \dots$ ) та мікромомент, який передається на мікронерівність, запишемо у вигляді

$$\mu_B = \Delta P \left[ f \frac{B_k}{2} \left( 1 - \frac{v_k}{4} \varphi_k^*(t) \right) - \frac{\varepsilon}{2} \pi^3 \sqrt[3]{\frac{4E_c I}{E}} \right] > 0, \quad (34)$$

де  $\varepsilon = 0,3 \div 0,8$  – експериментальний поправочний коефіцієнт при визначенні  $A_k$ .

Зауважимо, що доданок, що містить кубічний корінь, є відновлюючим моментом, вплив якого буде слабшати відповідно до відхилення осі сили  $\Delta P$  від осі симетрії деформаційної мікронерівності. Для отримання величини  $\varepsilon$  необхідно провести статистичну обробку експериментальних даних, таких як отримання твердості поверхневого шару, розрахунок геометричних параметрів деформаційних мікронерівностей, ступеня зносу поверхневого шару деталі, ступеня шорсткості поверхневого шару після відокремлення частинок зношеної поверхні.

Використовуючи отримані результати можливо розрахувати повний момент сил тертя відносно ребра умовної мікронерівності (другий множник (35)) на площі контакту деталей. При необхідності прирост  $\Delta T$  можна ввести в (35)

$$M = \frac{Pm}{\beta b l_2} \left[ f_0 - \xi_{\max} v_0 a \cos(p_0 t) + \xi_{\max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(p_0 t) \right] \times \left[ \sum_{n=1}^k B_k \left( 1 - \frac{v_k}{4} \varphi_k^*(t) \right) - \frac{\varepsilon}{2} \pi^3 \sqrt{\frac{4E_c I}{E}} \right] \frac{1}{n}. \quad (35)$$

Використовуючи (35) можемо обчислити середні згинальні напруження у наборі мікронерівностей [10]

$$\sigma_M = \frac{M}{W_M} \leq \sigma_{-1}. \quad (36)$$

де  $W_M$  – сумарний момент опору деформаційних мікронерівностей на майданчику контакту для кожної деталі;  $n$  – сумарна кількість мікронерівностей на майданчику контакту;  $\sigma_{-1}$  – границя витривалості матеріалу зміцненого поверхневого шару; ( $W_M = W_M/n$  – момент опору однієї мікронерівності).

Використовуючи формулу, подібну до (35), можна розрахувати середнє нормальне напруження для однієї деформаційної мікронерівності

$$\sigma_{\mu} = \frac{M_B}{W_M} \leq \sigma_{-1}. \quad (37)$$

Формули є перевірними при розрахунках на багатоциклічній втоми. Якщо нерівності (36), (37) не виконуються, але виконуються умови  $\sigma_M > \sigma_{-1}$ ,  $\sigma_{\mu} > \sigma_{-1}$ , то ці умови характеризують крихке руйнуванням зміцненого матеріалу і утворення мікротріщин з подальшим руйнуванням матеріалу, та є критичними нерівностями.

Розглянутий механізм зношування проявляється, наприклад, при роботі опорних вузлів обпалювальних машин для цементного, вапняного та металургійного виробництв під час взаємодії опірних кілець (бандажи  $D = 4 \div 5,5$  м і більше) з опорними роликами ( $d = 1,2 \div 2,4$  м).

Під час роботи цих печей виникають високі статичні навантаження на кожен опорний блок, значна абразивність навколишнього повітряного середовища та значний температурний фон (температура опорного вузла в зоні контакту досягає  $400 \div 450$  °C і більше). Для такого режиму роботи є характерним поява високотемпературних тріщин і пластична течія поверхневого шару взаємодіючих деталей.

На цих поверхнях спостерігається ущільнення суміжних шарів, утворення поверхневих тріщин і подальше сколювання поверхні.

Крім того, поверхневий знос може бути нерівномірним та носити хвилеподібний характер та досягати на поверхнях контакту  $15 \div 25$  мм.

Подібні ефекти виникають при прокатуванні залізничних (або трамвайних) коліс по рейках, тут поверхня рейок при тривалій експлуатації поїздів на магістралях набуває хвилястого характеру.

На округлених ділянках траси характер зносу буде іншим, це стосується реборд коліс та головок рейок. Такі ж питання виникають при накатці, прокатці та волочінні довгих заготовок. Ці питання більш виражені у випадках «холодних процесів».

Специфіці статті, в її постановочній частині, більш відповідає задача про зворотно-поступальні рухи. Взаємозв'язок задач тертя та зношення для випадків обертально-поступальних і поступальних пар буде розкрито при подальших дослідженнях.

### Висновки

1. Ця робота присвячена проблемі деформаційно-хвильових процесів в поверхневих шарах взаємодіючих деталей.

Як було встановлено, в зазначених шарах відбувається місцева втрата стійкості, тому рахувати взаємодіючі поверхні недеформованими буде некоректно з точки зору невиконання основних гіпотез, а також використання рішень та висновків теорії пружності (або в'язкопружності).

2. Досліджені можливості використання класичних методів ізотропної теорії пружності для вирішення по суті анізотропних задач, причому анізотропія стосується як деформації зовнішніх поверхонь взаємодіючих деталей, так і трансформації фізичних властивостей металу на цих поверхнях.

У даній роботі пропонується використовувати припущення про те, що задача є ізотропною в межах до деформованого зовнішнього шару, а цей шар передбачається навантаженим на гребнях деформаційних мікронерівностей пульсуючим дотичним та моментним навантаженнями. Такий підхід дає змогу сформулювати гіпотезу про тріщиноутворення в межах поверхневого шару, на місці з'єднання деформаційних мікронерівностей з поверхневим шаром.

3. Використана методика дозволяє перейти від проблеми з фізичною та геометричною анізотропією до ізотропної задачі теорії пружності з пульсуючим дотичним та моментним навантаженнями, які прикладені до гребнів деформаційних хвиль. Таке навантаження сприяє розкриттю зазору між хвилями і місцями їх прихоплення до поверхневого шару деталі. Для більшості розрахункових випадків дану задачу можна звести до плоскої задачі теорії пружності в напруженнях.

4. Розглянута задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності (для кожної деталі) шляхом складання двох рівнянь напружень, одного рівняння спільності деформації, одного рівняння для функції напружень Ері та граничних умов для кожної грані деталі розглянутої пари.

5. Складена математична модель задачі дозволяє визначити напруження в поверхневих та підповерхневих шарах деталі з урахуванням висоти деформаційних мікронерівностей та довжини хвилі мікронерівності з використанням математичного апарату плоскої теорії пружності для заданих граничних умов, що дозволяє визначити напруження, деформації та переміщення в точках деталі (з координатами віддаленими від поверхневого шару на деякі достатньо малі величини  $x, y$ ).

Навантаження на поверхні кожної деталі враховується при визначенні напружень  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ .

6. У практичному сенсі результати роботи можуть бути використані при оцінці пружно-деформованого стану деталей як поверхневих так і підповерхневих шарів, виходячи з положення поверхневого шару деталі, пов'язаного з пружною структурою її основи, як елемента плоскої задачі теорії пружності. Співвідношення напружень  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  встановлено за допомогою теорій міцності (II, III, IV), які дозволяють визначити умови утворення тріщин на певній відстані від поверхонь контакту деталей.

### Список літератури

1. Маліновський Ю.О., Власенков Д.П., Ситнік С.О., Терьошина С.С., Олійник С.Ю. Трактатування енергетичних методів у теорії тертя та зношування з позиції механіки суцільних середовищ та теорії дислокацій. *Проблеми тертя та зношування*. Київ, 2023. №4. С.97–120. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.4\(101\).18083](https://doi.org/10.18372/0370-2197.4(101).18083)
2. Колесников Ю.В., Морозов Е.М. Механика контактного разрушения. М.: Наука, 1991. 224 с.
3. Крагельский И.В., Добычин М.К., Комбалов В.С. Расчеты на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
4. Маліновський Ю.О., Власенков Д.П., Цвіркун С.Л., Олійник С.Ю. Термомеханічні явища у поверхневих шарах контактуючих деталей при терті та зношуванні. *Проблеми тертя та зношування*. Київ, 2023. №2. С.39–64. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.2\(99\).17771](https://doi.org/10.18372/0370-2197.2(99).17771)
5. Маліновський Ю.О., Цвіркун С.Л., Власенков Д.П., Терьошина С.С., Олійник С.Ю. Деформаційні аспекти прояву ударно-хвильової природи тертя та зношування. *Проблеми тертя та зношування*. Київ, 2023. №1. С.70–97. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.1\(98\).17593](https://doi.org/10.18372/0370-2197.1(98).17593)
6. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с. (перевод с англ.). <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9293-6>
7. Маліновський Ю.Ю., Мікосянчик О.А., Власенков Д.П., Олійник С.Ю., Терьошина С.С. Параметричні та автоколивальні процеси в поверхневих шарах деталей як зовнішні джерела їхнього руйнування під час тертя та зношування. *Проблеми тертя та зношування*. Київ, 2024. №4. С.4–25. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.4\(105\).18847](https://doi.org/10.18372/0370-2197.4(105).18847)
8. Смирнов В.В., Яковлев Р.Л. Механика приводов прокатных станов. М.: Металлургия, 1979. 211 с.
9. Учитель О.Д., Маліновський Ю.О., Панченко Г.М., Цвіркун С.Л., Олійник С.Ю. Передумови до виникнення автоколивань та хвильових процесів у формообразующих машинах при обробці заготовок і деталей методом пластичного деформування. *Металургійна та гірничорудна промисловість*. Дніпро, 2018. №6. С.21–29. <https://doi.org/10.33101/1992-2096.2018.6.21-29>
10. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. Київ, Наукова думка, 1988, 736 с. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-83040-4>

Отримано: 15 січня 2026

Прийнято: 1 березня 2026

Опубліковано: 9 квітня 2026

**Маліновський Юрій Олександрович** – кандидат технічних наук, доцент, Криворізький фаховий коледж Державного університету «Київський авіаційний інститут», вул. Олега Антонова, 1, м. Кривий Ріг, Україна, 50045, E-mail: [malinovsky129@gmail.com](mailto:malinovsky129@gmail.com), тел.: +38 098 130 73 24, +38 097 458 48 14, <https://orcid.org/0000-0001-5980-0908>

**Власенков Дмитро Петрович** – старший викладач, заступник директора, Криворізький фаховий коледж Державного університету «Київський авіаційний

---

інститут», вул. Олега Антонова, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна, E-mail: [vlasenkov.d@gmail.com](mailto:vlasenkov.d@gmail.com), тел.: +38 067 296 71 75.

**Олійник Світлана Юрїївна** – старший викладач кафедри технології машинобудування Криворізький національний університет, вул. Віталія Матусевича, 11, м. Кривий Ріг, 50027, Україна, E-mail: [olynik.syu@knu.edu.ua](mailto:olynik.syu@knu.edu.ua), тел.: +38 067 981 52 35, <https://orcid.org/0000-0002-6169-8874>

**Ситник Сергій Олександрович** – завідувач відділення, Криворізький фаховий коледж Державного університету «Київський авіаційний інститут», вул. Олега Антонова, 1, м. Кривий Ріг, Україна, 50045, E-mail: [sytnykteacher@gmail.com](mailto:sytnykteacher@gmail.com), тел.: +38 097 930 69 24

**Терьошина Світлана Сергїївна** – старший викладач, Криворізький фаховий коледж Державного університету «Київський авіаційний інститут», вул. Олега Антонова, 1, м. Кривий Ріг, Україна, 50045, E-mail: [svetlana\\_tereshi@ukr.net](mailto:svetlana_tereshi@ukr.net), тел.: +38 097 963 05 80

**Даценко Світлана Юрїївна** – старший викладач, Криворізький фаховий коледж Державного університету «Київський авіаційний інститут», вул. Олега Антонова, 1, м. Кривий Ріг, Україна, 50045, E-mail: [dacenko\\_svetlana@krfk.kai.edu.ua](mailto:dacenko_svetlana@krfk.kai.edu.ua), тел.: +38 096 315 94 50

*Yu. MALINOVSKYI, D. VLASENKOV, S. OLIYNYK, S. SYTNYK, S. TEROSHYNIA, S. DATSENKO*

### EVALUATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF INTERACTING SURFACE LAYERS USING ELASTICITY THEORY METHODS UNDER FRICTION AND WEAR CONDITIONS

In the course of research in the field of friction and wear theory, one of the working hypotheses is that under the influence of tangential loads, the outer layers of interacting parts change their flat shape to a wave-like one. That is, the flat cross-sections of the outer layer are distorted and lose their longitudinal stability [1]. Therefore, this problem becomes an anisotropic problem of elasticity theory, taking into account the properties of the outer contact layer. Otherwise, the problem has a peculiarity within the boundary (contact) condition, which complicates its solution in this formulation. However, in a number of calculation cases, it can be assumed that at the moment of interaction of parts on distorted planes, the deformed micro-irregularities on both parts were mutually destroyed due to shear deformation or crushing to such values of micro-irregularity heights at which the outer layers can be considered as layers that have restored their original flat shape (without taking into account worn microportions of material).

As a result of cutting off deformation micro-irregularities under the die and in front of the die, the outer layers of interacting parts restore their original flat (pre-deformation) shape as a result of brittle and plastic wear.

Therefore, when assessing the stress-strain state of interacting parts, it can be assumed that two elastic half-spaces are operating under the influence of a system of vertical and tangential forces.

Thus, the problem under consideration can be reduced to a plane problem of elasticity theory under the influence of a vertical weight load  $P$  and a tangential load  $fP$  caused by shear resistance or deformation (wave) micro-irregularities. In other words, in this problem, we neglect the influence of deformation waves formed as a result of loss of longitudinal stability on the stress-strain state of the outer layer of the part.

In this case, the influence of deformation waves of one part on the loaded half-space of the second part is replaced by a system of impulse (periodic) forces.

**Key words:** friction, wear, elasticity, brittleness, creep, Young's modulus, reduced modulus of elasticity, Poisson's ratio, anisotropic material, surface layer, tangential impulse load, plane elasticity problem, plane stress state, compatibility equation, stress function.

### References

1. Malinovskyi Yu.O., Vlasenkov D.P., Sytnik S.O., Terioshyna S.S., Oliinyk S.Yu. Traktuvannia enerhetychnykh metodiv u teorii tertia ta znoshuvannia z pozytsii mekhaniky sutsilnykh seredovyshch ta teorii dyslokatsii. *Problemy tertia ta znoshuvannia*. Kyiv, 2023. №4. S.97–120. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.4\(101\).18083](https://doi.org/10.18372/0370-2197.4(101).18083)
2. Kolesnikov Yu.V., Morozov E.M. *Mekhanika kontaktного razrusheniia*. M.: Nauka, 1991. 224 s.
3. Kragelskii I.V., Dobychin M.K., Kombalov V.S. *Raschety na trenie i iznos*. M.: Mashinostroenie, 1977. 526 s.
4. Malinovskyi Yu.O., Vlasenkov D.P., Tsvirkun S.L., Oliinyk S.Yu. Termomekhanichni yavyscha u poverkhnevyykh sharakh kontaktuiuchykh detalei pry tertii ta znoshuvanni. *Problemy tertia ta znoshuvannia*. Kyiv, 2023. №2. S.39–64. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.2\(99\).17771](https://doi.org/10.18372/0370-2197.2(99).17771)
5. Malinovskyi Yu.O., Tsvirkun S.L., Vlasenkov D.P., Terioshyna S.S., Oliinyk S.Yu. Deformatsini aspekty proiavu udarno-khvyliovoi pryrody tertia ta znoshuvannia. *Problemy tertia ta znoshuvannia*. Kyiv, 2023. №1. S.70–97. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.1\(98\).17593](https://doi.org/10.18372/0370-2197.1(98).17593)
6. Timoshenko S.P., *Gudier Dzh. Teoriia uprugosti*. M.: Nauka, 1979. 560 s. (perevod s angl.). <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9293-6>

7. Malinovskiy Yu.Yu., Mikosianchuk O.A., Vlasenkov D.P., Oliinyk S.Yu., Terioshyna S.S. Parametrychni ta avtokolyvalni protsesy v poverkhnevyykh sharakh detalei yak zovnishni dzherela yikhnoho ruinuvannia pid chas tertia ta znoshuvannia. *Problemy tertia ta znoshuvannia*. Kyiv, 2024. №4. S.4–25. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.4\(105\).18847](https://doi.org/10.18372/0370-2197.4(105).18847)

8. Smirnov V.V., Iakovlev R.L. Mekhanika privodov prokatnykh stanov. M.: Metallurgiiia, 1979. 211 s.

9. Uchytel O.D., Malinovskiy Yu.O., Panchenko H.M., Tsvirkun S.L., Oliinyk S.Yu. Peredumovy do vynyknennia avtokolyvan ta khvyliovyykh protsesiv u formoobrazuiuchykh mashynakh pry obrobtisi zahotovok i detalei metodom plastychnoho deformuvannia. *Metalurhiina ta hirnychorudna promyslovist*. Dnipro, 2018. №6. S.21–29. <https://doi.org/10.33101/1992-2096.2018.6.21-29>

10. Pisarenko H.S., Iakovlev A.P., Matveev V.V. Spravochnik po soprotivleniiu materialov. Kyiv: Naukova dumka, 1988. 736 s. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-83040-4>

**Malinovskiy Yuriy Olexandrovych** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kryvyi Rih professional college of State University «Kyiv Aviation Institute», Kryvyi Rih, 1 Oleha Antonova St., 1, Ukraine, 50045, E-mail: [malinovsky129@gmail.com](mailto:malinovsky129@gmail.com), tel.: +38 098 130 73 24, +38 097 458 48 14, <https://orcid.org/0000-0001-5980-0908>

**Vlasenkov Dmyro Petrovych** – senior teacher, head's assistant, Kryvyi Rih professional college of State University «Kyiv Aviation Institute», Kryvyi Rih, 1 Oleha Antonova St., Ukraine, 50045, E-mail: [vlasenkov.d@gmail.com](mailto:vlasenkov.d@gmail.com), tel.: +38 067 296 71 75.

**Oliinyk Svitlana Yuriivna** – senior lecturer of the Department of Mechanical Engineering Technology Kryvyi Rih National University, Kryvyi Rih, 11, Vitaly Matusevicha St., Ukraine, 50027, E-mail: [olynik.syu@knu.edu.ua](mailto:olynik.syu@knu.edu.ua), tel.: +38 067 981 52 35, <https://orcid.org//0000-0002-6169-8874>

**Sytnyk Serhii Oleksandrovych** – Head of Department, Kryvyi Rih professional college of State University «Kyiv Aviation Institute», Kryvyi Rih, 1 Oleha Antonova St., 1, Ukraine, 50045, E-mail: [sytnykteacher@gmail.com](mailto:sytnykteacher@gmail.com), tel.: +38 097 930 69 24

**Teroshyna Svitlana Serhiivna** – senior lecturer, Kryvyi Rih professional college of State University «Kyiv Aviation Institute», Kryvyi Rih, 1 Oleha Antonova St., 1, Ukraine, 50045, E-mail: [svetlana\\_tereshi@ukr.net](mailto:svetlana_tereshi@ukr.net), tel.: +38 097 963 05 80

**Datsenko Svitlana Yuriivna** – senior lecturer, Kryvyi Rih professional college of State University «Kyiv Aviation Institute», Kryvyi Rih, 1 Oleha Antonova St., 1, Ukraine, 50045, E-mail: [dacenko\\_svetlana@krfk.kai.edu.ua](mailto:dacenko_svetlana@krfk.kai.edu.ua), tel.: +38 096 315 94 50