

УДК 629.735.051:681.513 (045)

DOI: 10.18372/2073-4751.86.21275

Кліпа А.М., к.т.н.,
orcid.org/0009-0003-4807-2257,
e-mail: antonina.klipa@npp.kai.edu.ua,

Абрамович О.О., к.т.н.,
orcid.org/0009-0002-8036-0665,
e-mail: olena.abramovych@npp.kai.edu.ua,

Білак Н.В., к.т.н.,
orcid.org/0009-0001-2207-7995,
e-mail: nataliia.bilak@npp.kai.edu.ua,

Єрмолаєва О.В.,
orcid.org/0009-0007-2025-3530,
e-mail: olha.yermolaieva@npp.kai.edu.ua

ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ ПРИ СИНТЕЗІ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ ПОЛЬОТОМ МАЛИХ БЕЗПЛОТНИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

Національний університет «Київський авіаційний інститут»

Вступ

На сучасному етапі розвитку аерокосмічної індустрії в усьому світі, і в Україні зокрема, спостерігається значне зростання інтересу до малих безпілотних літальних апаратів (БПЛА). Для забезпечення високої конкурентоздатності БПЛА розробники прагнуть знайти компроміс між вартістю виробу та масою корисного навантаження, необхідного для виконання цільових завдань, що призводить, наприклад, до відмови від використання автомата тяги. Також для зменшення вартості БПЛА використовують прості бортові комп'ютери та мінімально можливу кількість дешевих датчиків, вимірювані сигнали яких містять значні рівні шумів, що є викликом при синтезі системи управління польотом, оскільки використання стандартних законів управління є неефективним, а іноді й неможливим [1, 2].

Розроблені раніше методи синтезу систем управління польотом БПЛА при неповних вимірах вектора станів, що базуються на застосуванні спостерігача Люенбергера [3, 4] не дають чіткої відповіді щодо вибору полюсів

спостерігача. Також залишається відкритим питання щодо визначення додатно-визначених симетричних вагових матриць, що входять у інтегральний квадратичний критерій швидкості переходу системи з початкового стану в нульовий [5].

Мета

Метою статті є розробка процедури параметричної оптимізації для визначення оптимальних значень полюсів спостерігача Люенбергера та вагових матриць, необхідних для синтезу оптимального детермінованого регулятора, під час синтезу систем управління польотом малих БПЛА при стохастичних збуреннях і неповних вимірах вектора станів.

Постановка задачі

Математична модель руху БПЛА описується рівняннями в просторі станів [6]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t),\end{aligned}\quad (1)$$

де \mathbf{A} та $\mathbf{x}(t)$ – матриця та вектор стану розмірами $n \times n$ та $n \times 1$ відповідно; \mathbf{B} та $\mathbf{u}(t)$ – матриця та вектор управління розмірами $n \times m$ та $m \times 1$ відповідно; \mathbf{C}

та $\mathbf{y}(t)$ – матриця та вектор спостереження розмірами $l \times n$ та $l \times 1$ відповідно; при чому $l < n$, \mathbf{D} – матриця прямої передачі управління з входу на вихід розміром $l \times m$. Шуми датчиків у даній моделі не враховуються.

Для моделі (1) необхідно синтезувати оптимальний лінійний детермінований регулятор шляхом мінімізації інтегрального квадратичного критерію виду [1, 3]:

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R}_2 \mathbf{u}] dt, \quad (2)$$

де $\mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x}$ та $\mathbf{u}^T \mathbf{R}_2 \mathbf{u}$ – складові, що характеризують точність управління та затрати потужності на управління відповідно; \mathbf{R}_1 та \mathbf{R}_2 – додатно-визначені симетричні вагові матриці.

Врахування динаміки виконавчих механізмів при синтезі системи управління польотом призводить до збільшення порядку об'єкту управління на кількість управляючих сигналів, що в загальному випадку є таким: $l < n + m$.

Для врахування турбулентності атмосфери при синтезі системи управління польотом застосовується стандартизована модель формуючого фільтру (фільтру Драйдена) [6].

Основна частина

Класичний варіант синтезу, запропонований Р. Калманом [3] припускає, що всі елементи вектора станів $\mathbf{x}(t)$ вимірюються в повному обсязі. З математичної точки зору це означає, що розмірність вихідного вектора $\mathbf{y}(t)$ співпадає з розмірністю вектора станів $\mathbf{x}(t)$, тобто $l = n$, а матриця \mathbf{C} є одиничною діагональною матрицю розміром $(n \times n)$. При такому припущенні розв'язок задачі оптимального управління при регулюванні за вихідною змінною відповідно до [3] є таким:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(t), \quad (3)$$

де \mathbf{F} – матриця коефіцієнтів підсилення регулятора розміром $(m \times n)$, знак „–” враховує, що зворотній зв'язок від'ємний.

Як відомо [1], для визначення матриці коефіцієнтів підсилення регулятора необхідно мінімізувати інтегрально квадратичний критерій (2) шляхом розв'язання алгебраїчного рівняння Рікати [3]. Знаючи розв'язок рівняння Рікати, знаходимо матрицю коефіцієнтів підсилення лінійно-квадратичного регулятора як

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P},$$

де \mathbf{P} – розв'язок рівняння Рікати.

В задачі, що розв'язується, умова щодо вимірювання всіх змінних стану об'єкта управління не виконується, оскільки $l < n + m$. Для того, щоб скористатись класичним алгоритмом синтезу оптимального лінійного детермінованого регулятора [1, 3] шляхом мінімізації критерію (2) необхідно спочатку відновити вектор станів $\mathbf{x}(t)$. Класично ця задача вирішується за допомогою оптимального стохастичного спостерігача (фільтра Калмана) [3], який призводить до збільшення порядку системи (об'єкт керування + фільтр Калмана) вдвічі [7]. Таке збільшення порядку системи суттєво ускладнює закон управління. Реалізувати такий закон на простому бортовому комп'ютері, що має дуже обмежені ресурси важко, тому, як альтернативне рішення, в [7] пропонується для відновлення вектору станів $\mathbf{x}(t)$ використовувати спостерігач пониженого порядку (фільтр Люенбергера).

Модель спостерігача пониженого порядку в просторі станів з вектором стану $\mathbf{q}(t)$, вхідним вектором $[\mathbf{y}(t) \ \mathbf{u}(t)]^T$ та вихідним вектором $\hat{\mathbf{x}}(t)$ є має такий вигляд [3]:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) = & [C'AL_2 - KCAL_2]q(t) + \\ & + [C'AL_2K + C'AL_1 - KCAL_1 - \\ & - KCAL_1 - KCAL_2K]y(t) + \quad (4) \\ & + [C'B - KCB]u(t); \\ \hat{x}(t) = & L_2q(t) + [L_1 + L_2K]y(t), \end{aligned}$$

де C' – матриця змінних, які необхідно відновити; K – матриця коефіцієнтів підсилення фільтра Люенбергенра; матриці L_1 та L_2 визначаються з виразу:

$$[L_1 \ L_2] = \begin{pmatrix} C \\ C' \end{pmatrix}^{-1}.$$

Матриця коефіцієнтів підсилення фільтра Люенбергера залежить від розміщення його полюсів, значення яких необхідно задати при синтезі фільтра. Оскільки значення полюсів суттєво впливають на результат відновлення вектору станів об'єкту, який в свою чергу враховується при синтезі системи управління (3), то їх вибір являє собою окрему задачу.

При синтезі оптимального лінійного детермінованого регулятора необхідно задавати значення R_1 та R_2 , вибір яких також впливає на роботу системи управління.

Для вирішення поставлених задач в роботі пропонується застосування процедури параметричної оптимізації (мінімізації) H_2 -норми, як показника якості $J = H_2$, шляхом одночасного налаштування полюсів спостерігача пониженого порядку та додатно-визначених симетричних вагових матриці, що входять до інтегрального квадратичного критерію (2).

При оптимізації вводяться наступні умови [8]:

- значення полюсів спостерігача від'ємні та дійсні;
- елементи додатно-визначених симетричних вагових матриць додатні та дійсні.

Під час процедури оптимізації показник якості (2) розраховується на кожному кроці. Для розрахунку цього

показника використовується грам'ян керованості

$$G_c = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T\tau} d\tau,$$

який можна визначити тільки для стійких і повністю керованих систем. Тому в процесі виконання оптимізаційної процедури (при зміні полюсів спостерігача та елементів матриць R_1 та R_2) необхідно забезпечити стійкість системи.

Для зведення задачі умовної оптимізації до задачі безумовної, включаємо до показника якості штрафну функцію PF , що обмежує розміщення полюсів всередині деякої області M на комплексній площині [9], тобто

$$J = H_2 + PF.$$

Область M штрафних функцій на комплексній площині коренів відрізняється для неперервних і дискретних систем [10].

На рис. 1 зображено штрафну функцію для неперервних систем.

Площа, обмежена на рис. 1 чіткими лініями, характеризується трьома параметрами, а саме: відстанями d_{m1} , d_{m2} та кутом α . Ці параметри відповідно характеризують мінімальну величину дійсної частини полюсів системи, що забезпечує деякий запас стійкості;

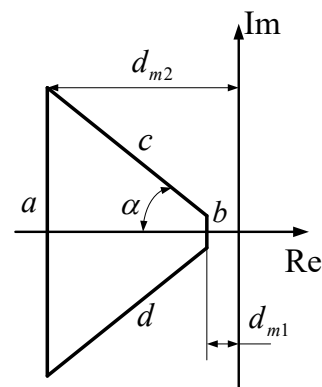


Рис. 1. Штрафна функція для неперервних систем

смугу пропускання та коливальність замкненої системи.

Отже, значення штрафної функції повинно дорівнювати нулю, якщо полюси системи під час процедури оптимізації

знаходяться в середині трапеції зі сторонами a, b, c, d (в області M) та значно зростати, якщо хоча б один полюс виходить за межі області M . Таким чином, під час процедури оптимізації за умови існування штрафної функції при всіх змінюваннях параметрів система буде знаходитись в області стійкості.

Сама процедура оптимізації виконується за відомим методом Нелдера-Міда [11] в пакеті програм MATLAB за допомогою функції `fminsearch`.

Розроблений підхід до вирішення поставленої проблеми було застосовано до «benchmark» моделі поздовжнього руху малого БПЛА [12] з вектором стану $x(t) = [V, \alpha, \vartheta, q, h]^T$, де V – швидкість БПЛА, α – кут атаки, ϑ – кут тангажа, q – кутова швидкість тангажа та h – висота польоту; вектором управління $u(t) = [\delta_{elev}]$, де δ_{elev} – відхилення руля висоти та вектором вимірювань $y(t) = [q, h]^T$. Четвірка матриць, що описує модель динаміки поздовжнього руху цього БПЛА в просторі станів, є такою [12]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.0345 & 5.9942 & -9.7764 & 0 & 0 \\ -0.0041 & -1.7565 & 0 & 0.9860 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.1905 & 0 \\ 0.0033 & -25.6814 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -69.44 & 69.44 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = [0.3576 \quad -0.1628 \quad 0 \quad -31.1037 \quad 0]^T;$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В результаті застосування запропонованої процедури оптимізації було отримано оптимальні значення для полюсів фільтра Люенбергера (4):

$$\mathbf{P}_k = [-0.032 \quad -3.690 \quad -2.480 \quad -0.035]$$

та елементи вагових матриць для показника якості (2):

$$\mathbf{R}_1 = [0.12 \quad 1.12 \quad 1.07 \quad 0.77 \quad 0.06 \quad 0.19];$$

$$\mathbf{R}_2 = [8.6]$$

що далі були використані для синтезу оптимального лінійного детермінованого

регулятора [3, 13] після відновлення усіх змінних стану:

H_2 -норми синтезованої системи управління поздовжнім рухом малого БПЛА є наступними:

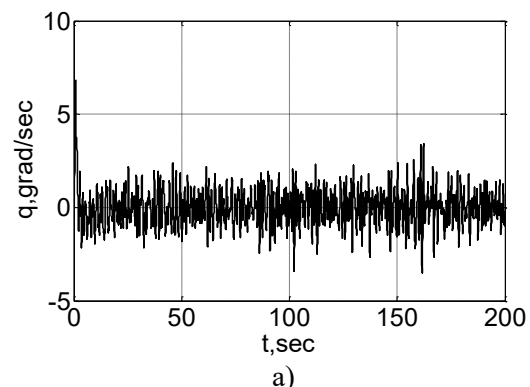
- для детермінованого випадку 0.3600;
- для стохастичного – 2.0684.

Середньо квадратичні відхилення (с.к.в.) змінних стану системи управління поздовжнім рухом малого БПЛА з синтезованим лінійно-квадратичним регулятором у зворотному зв'язку наведені в табл. 1.

Таблиця 1. С.к.в. змінних стану

V , м/с	α , град	ϑ , град
0.2125	0.3826	0.3237
q , град/с	h , м	δ_{elev} , град
0.9731	0.3833	0.2395

Результати моделювання системи управління поздовжнім рухом малого БПЛА з урахуванням турбулентності атмосфери та при вимірюванні тільки двох змінних станів q та h наведені на рис. 2 у вигляді реакції системи на відхилення руля висоти для зміни висоти польоту на 50 метрів.



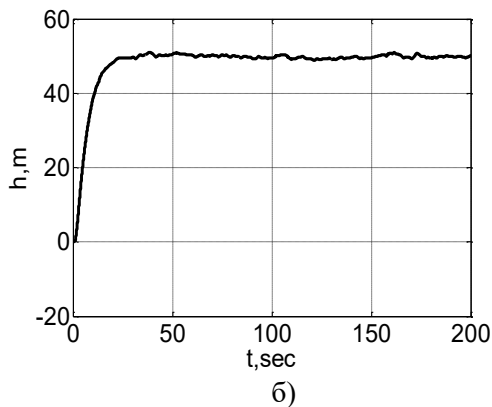


Рис. 2. Результати моделювання замкненої системи: перехідні процеси
а) за кутовою швидкістю тангажа;
б) за висотою

Висновки

В роботі запропоновано застосування процедури параметричної оптимізації під час синтезу систем управління польотом малих БПЛА при стохастичних збуреннях і неповних вимірах вектора станів для визначення оптимальних значень полюсів спостерігача Луюнбергера, необхідного для відновлення змінних вектора станів, що не вимірюються, та вагових матриць, необхідних для синтезу оптимального детермінованого регулятора. Обґрунтовано введення штрафної функції в показник якості, що мінімізується під час виконання оптимізаційної процедури. Процедура параметричної оптимізації виконується за відомим методом Нелдера-Міда в пакеті програм MATLAB.

Ефективність запропонованого підходу для синтезу системи управління польотом було перевірено та підтверджено шляхом комп'ютерного моделювання поздовжнього руху малого БПЛА з урахуванням турбулентності атмосфери та при вимірюванні тільки двох змінних станів.

Література

1. Klipa A., Sydorenko A. Influence of Number of Measured States on Accuracy and Robustness of Flight Control System. *Methods and Systems of Navigation and Motion Control* : Proceedings of IEEE 3rd Int. Conf., Kyiv, October 14-17, 2014. / National Aviation University. Kyiv, 2014. P. 125-128.

2. Кліпа А.М. Особливості синтезу системи керування польотом малого безпілотного літального апарату. *Aviation in the XXI-st Century. Safety in Aviation and Space Technologies. Aeronavigation: tendencies and prospects. Control of complex systems* : Proceedings of X-th World Congress, Kyiv, September, 28-30, 2022. / National Aviation University. Kyiv, 2022. P. 3.2.11-3.2.14.

3. Kwakernaak H., Sivan R. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, 1972. 595 p.

4. Komnatska M., Klipa A., Berezan-skiy Y., Kiliian I. On One Approach of Observer-Based Flight Control System Design. *Electronics and Control Systems*. 2015. №2 (44). P. 33-39.

5. Klipa A. Luenberger Observer in the Problems of Flight Control Systems Design. *Проблеми розвитку глобальної системи зв'язку, навігації, спостереження та організації повітряного руху CNS/ATM*: тези доп. Наук. техн. конф., м. Київ, 21-23 листопада 2016 р. / Національний авіаційний університет. Київ. 2016. С. 105.

6. McLean D. *Automatic Flight Control Systems*, Englewood: Prentice Hall Inc., 1990. 593 p.

7. Galaguz T. Comparison of UAV Control Systems Designed by Means of Kalman Filter and Luenberger Observer. *Actual Problems of Unmanned Air Vehicles Developments (APUAVD)* : Proceedings of IEEE 2nd Int. Conf., Kyiv, October 15-17, 2013. / National Aviation University. Kyiv, 2013. P. 165-168.

8. Кліпа А.М. Параметрична оптимізація при синтезі систем управління польотом легких безпілотних літальних апаратів. *Сучасні технології розвитку комп'ютеризованих систем керування рухом*: тези доп. Наук.-техн. конф., м. Київ, 21-22 листопада 2022 р. / Національний авіаційний університет. Київ, 2022. С. 42-44.

9. Абрамович О.О., Білак Н.В., Кліпа А.М. Робастна оптимізація високонадійних систем автоматичного управління. *Зв'язок*. 2024. №4 (170). С. 58-64.

URL: <https://doi.org/10.31673/2412-9070.2024.045864>.

10. Тунік А.А., Абрамович О.О. Основи сучасної теорії управління : навч. посібник. К. : НАУ-друк, 2010. – 260 с.

11. Андруник В.А., Висоцька В.А., Пасічник В.В., Чирун Л.Б., Чирун Л.В. Чисельні методи в комп'ютерних науках. Том 2 : навч. посібник. Львів : «Новий Світ - 2000», 2018. 805 с.

12. Tunik A., Ryu H., Lee H. Parametric Optimization Procedure for Robust Flight Control System Design. *KSAS Int. Journal*. 2001. Vol. 2, no 2. P. 95-107.

13. Optimal Control Systems for Aircraft and Moving Vehicles: Guide to Laboratory Work for higher education seekers / compilers: A. Klipa, O. Abramovych, N. Bilak. К. : NAU, 2024. 52 p.

Кліпа А.М., Абрамович О.О., Білак Н.В., Єрмолаєва О.В.

ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ ПРИ СИНТЕЗІ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ ПОЛЬОТОМ МАЛИХ БЕЗПІЛОТНИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

Робота присвячена питанням синтезу систем управління малих безпілотних літальних апаратів (БПЛА) при неповних вимірюваннях змінних станів та дії стохастичних збурень. Для вирішення цієї проблеми запропоновано процедуру параметричної оптимізації методом Нелдера-Міда. Запропонована процедура оптимізації дає можливість оцінити бажане розташування полюсів фільтра Люенбергера, який застосовується для відновлення станів, що не вимірюються, та елементів вагових матриць, необхідних для синтезу оптимального детермінованого регулятора. Для зведення задачі умовної оптимізації до задачі безумовно запропоновано включити до показника якості, що мінімізується, штрафну функцію. Ефективність запропонованої процедури параметричної оптимізації в задачах синтезу систем управління польотом підтверджено на моделі малого БПЛА шляхом комп'ютерного моделювання

Ключові слова: параметрична оптимізація, штрафна функція фільтр Люенбергера, оптимальний детермінований регулятор, система управління польотом, малий БПЛА.

Klipa A.M., Abramovych O.O., Bilak N.V., Ermolaeva O.V.

PARAMETRIC OPTIMIZATION IN DESIGN OF SMALL UAV FLIGHT CONTROL SYSTEMS

This paper is devoted to the issues of flight control systems design for small Unmanned Aerial Vehicle (UAV) in the presence of incomplete measurements and stochastic disturbances. To solve this problem the parametric optimization procedure based on the Nelder-Mead method is proposed. With the help of this procedure it is possible to estimate the desired location of poles of the Luenberger filter (used for unmeasured states restoration) and elements of weight matrices that are needed for optimal deterministic controller design. To convert the constrained optimization procedure to unconstrained one it is proposed to include the penalty function into the performance index that is minimized. The efficiency of the proposed parametric optimization procedure in problems of flight control systems design is proved on the model of small UAV with the help of simulation.

Keywords: parametric optimization, penalty function, Luenberger filter, optimal deterministic controller, flight control system, small UAV.

Стаття подана до редакції: 16/03/2026

Стаття прийнята до опублікування: 25/03/2026

Стаття опублікована: 30/05/2026

Стаття поширюється на умовах ліцензії CC BY 4.0